Лекция 5. Разбиения. Продолжение

Рекуррентная формула, полученная на прошлой лекции, позволяет быстро вычислять значения $p(n)$, но не отвечает на вопрос о поведении последовательности $p(n)$.

Решить задачу о скорости роста последовательности $p(n)$ позволяют следующие рассуждения.

Пусть $P(x) = 1 + p(1)x + p(2)x^2 + p(3)x^3 + \ldots$ — производящая функция. Мы знаем, что

$$P(x) = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\cdots}$$

Так как

$$\ln(1/P(x)) = -\ln(1-x) - \ln(1-x^2) - \ln(1-x^3) - \ldots \sim x + x^2 + x^3 + \ldots,$$

то бесконечное произведение $(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\cdots$ сходится при $|x| < 1$, следовательно, при $|x| < 1$ сходится и ряд $1 + p(1)x + p(2)x^2 + p(3)x^3 + \ldots$.

Что происходит с функцией $P(x)$ при $x \to 1$? Разумеется, $P(x) \to \infty$, но с какой скоростью? Имеем,

$$\ln P(x) = \sum_n \ln \frac{1}{1-x^n} = \sum_{m,n} \frac{x^{mn}}{m} = \sum_m \frac{x^m}{m(1-x^m)}.$$

Так как при $0 < x < 1$

$$mx^{m-1}(1-x) < (1-x)(1+x+x^2+\ldots+x^{m-1}) = 1-x^m = (1-x)(1+x+\ldots+x^{m-1}) < m(1-x),$$

то

$$\frac{1}{1-x}\sum_m \frac{x^m}{m^2} < \ln P(x) < \frac{1}{1-x}\sum_m \frac{x}{m^2}. \tag{1}$$

Так как

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}$$

(эту формулу мы докажем), то при $x \to 1$ сумма обеих рядов в выражении (1) стремится к $\pi^2/6$. Следовательно,

$$\ln P(x) \sim \frac{\pi^2}{6(1-x)}$$

и

$$P(x) \sim \exp\left(\frac{\pi^2}{6(1-x)}\right).$$

Но нас интересует порядок роста коэффициентов производящей функции $P(x)$. Если последовательность $p(n)$ растет как n^k при некотором $k > 0$, то тогда $P(x)$ при $x \to 1$ растет как $1/(1-x)^{k+1}$, что медленнее, чем действительный рост производящей функции. Если $p(n)$ растет как e^{an} при $a > 0$, то радиус сходимости производящего ряда < 1. Будем считать, что последовательность $p(n)$ растет как $\exp(an^b)$ при $0 < b < 1$ и подберем числа a и b так, чтобы рост производящей функции совпадал с ее действительным ростом.

Положим $x = e^{-y}$ и рассмотрим ряд

$$F(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} e^{an^b} x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} e^{an^b - ny}.$$

При $n \to \infty$ члены ряда быстро убывают. Можно считать, что сумма ряда, по порядку величины, равна максимальному члену. Величина $an^b - ny$ максимальна, когда $ab\,n^{b-1} = y$, т.е., когда

$$n = \left(\frac{ab}{y}\right)^{1/(1-b)}.$$

Тогда максимальный член ряда равен

$$\exp\bigl(a^{1/(1-b)} y^{-b/(1-b)} b^{b/(1-b)} (1-b)\bigr) = \exp\bigl(a^{1/(1-b)} b^{b/(1-b)} (1-b) (-\ln x)^{-b/(1-b)}\bigr).$$

Если $x \to 1-0$, то $-\ln x \sim 1-x$, следовательно, максимальный член ряда (а, значит, и его сумма) имеет порядок

$$\exp\bigl(a^{1/(1-b)} b^{b/(1-b)} (1-b)(1-x)^{-b/(1-b)}\bigr).$$

Таким образом,

$$a^{1/(1-b)} b^{b/(1-b)} (1-b)(1-x)^{-b/(1-b)} = \frac{\pi^2}{6(1-x)}.$$

И мы получаем, что $b = 1/2$, $a = \pi\sqrt{2/3}$ и

$$\ln p(n) \sim \pi\sqrt{\frac{2n}{3}}.$$

Эта оценка $p(n)$ очень грубая, потому что мы хотели бы получить формулу непосредственно для числа разбиений, а не для логарифма этого числа. Такая асимптотическая формула есть:

$$p(n) \approx f(n) = \frac{\exp(\pi\sqrt{2n/3})}{4n\sqrt{3}}.$$

При $n = 10$ эта формула дает $p(10) \approx 48$ (вместо $p(10) = 42$), а при $n = 20$ дает $p(20) \approx 692$ (вместо $p(20) = 627$). Доказать равенство

$$\lim_{n\to\infty} p(n)/f(n) = 1$$

очень трудно.

Принцип включения-исключения. Две задачи

Рассмотрим пример. Пусть множество A является объединением трех своих подмножеств: $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$. Через $|A|$ мы будем обозначать число элементов множества A. Как найти $|A|$, если нам известны величины $|A_i|$? Ответ следующий:

$$|A| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|.$$

Действительно, если $a \in A_1 \setminus (A_2 \cup A_3)$, этот элемент учитывается только в первом слагаемом один раз. Если $a \in (A_1 \cap A_2) \setminus A_3$, то он учитывается в первом слагаемом один раз, во втором слагаемом один раз и в четвертом слагаемом минус один раз. Итого этот элемент мы посчитали ровно один раз. Если $a \in A_1 \cap A_2 \cap A_3$, то этот элемент учитывается в каждом слагаемом по одному разу (четыре раза с плюсом и три — с минусом). Итого, он опять-таки подсчитан ровно один раз.

Теорема (формула включения-исключения). *Пусть* $A = A_1 \cup \ldots \cup A_n$*, тогда*

$$|A| = \sum_i |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots.$$

Доказательство. Пусть $a \in (A_1 \cap \ldots \cap A_k) \setminus (A_{k+1} \cup \ldots \cup A_n)$, т.е. элемент a принадлежит подмножествам $A_1, \ldots, A_k$ и не принадлежит подмножествам $A_{k+1}, \ldots, A_n$. Тогда он учитывается в k слагаемых первой группы (с плюсом), в C_k^2 слагаемых второй группы (с минусом), в C_k^3 слагаемых третьей группы (с плюсом) и так далее. Таким образом, наш элемент подсчитан

$$s = k - C_k^2 + C_k^3 - C_k^4 + \ldots + (-1)^{k+1} C_k^k$$

раз. Учитывая тот факт, что $k = C_k^1$, получаем

$$s = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1} C_k^i = -\Big(\sum_{i=0}^{k} (-1)^i C_k^i\Big) + 1 = 1.$$

$\square$

Эту теорему можно применять только в том случае, когда мы знаем не только число элементов в каждом подмножестве, но и число элементов во всевозможных их пересечениях. Поэтому круг задач, для решения которых можно применять метод включения-исключения, не так уж велик. Мы рассмотрим две такие задачи.

Число беспорядков. Перестановка чисел $1, 2, \ldots, n$ называется *беспорядком*, если ни одно число не осталось на своем месте. Для $n = 3$ имеется два беспорядка: $(2,3,1)$ и $(3,1,2)$. Для $n = 4$ — девять:

$$\begin{matrix} (2,1,4,3) & (3,1,4,2) & (4,1,2,3) \\ (2,3,1,4) & (3,4,1,2) & (4,3,1,2) \\ (2,4,1,3) & (3,4,2,1) & (4,3,2,1) \end{matrix}$$

Обозначим через A множество перестановок, не являющихся беспорядками: если $s \in A$, то найдется i такое, что в s число i стоит на i-м месте. Таким образом, $A = A_1 \cup \ldots \cup A_n$, где A_i — множество перестановок, в которых число i стоит на i-м месте. Тогда $|A_i| = (n-1)!$. Далее, $A_i \cap A_j$ — множество перестановок, в которых число i стоит на i-м месте, а число j — на j-м. Следовательно, $|A_i \cap A_j| = (n-2)!$. Аналогично, $|A_i \cap A_j \cap A_k| = (n-3)!$, и так далее. Следовательно,

$$|A| = n \cdot (n-1)! - C_n^2 (n-2)! + C_n^3 (n-3)! - \ldots = n! - \frac{n!}{2!} + \frac{n!}{3!} - \frac{n!}{4!} + \ldots$$

Поэтому, число беспорядков равно

$$n! - \left(n! - \frac{n!}{2!} + \frac{n!}{3!} - \frac{n!}{4!} + \ldots\right) = n! \cdot \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \ldots\right).$$

Для $n = 4$ это дает

$$4! \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24}\right) = 12 - 4 + 1 = 9.$$

Вероятность того, что наугад взятая перестановка окажется беспорядком равна отношению числа беспорядков к общему числу перестановок, т.е. равна числу

$$p_n = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!}.$$

При $n \to \infty$ последовательность p_n быстро сходится к e^{-1}. Так что вероятность для перестановки быть беспорядком практически равна $1/e$ уже при $n > 10$.

Количество чисел, взаимно простых с данным. Пусть n — некоторое натуральное число. Сколько есть чисел, меньших n и взаимно простых с n? Количество таких чисел обозначим через $\varphi(n)$. Пусть A — множество целых чисел в промежутке $[0, n]$, имеющих общий делитель с числом n. Разложим число n в произведение простых чисел:

$$n = p_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot p_m^{k_m}.$$

Обозначим через A_i, $1 \leqslant i \leqslant m$ множество целых чисел в указанном промежутке, делящихся на p_i. Тогда $A = A_1 \cup \ldots \cup A_m$ и $|A_i| = n/p_i$. Так как $|A_i \cap A_j| = n/p_i p_j$, $A_i \cap A_j \cap A_k = n/p_i p_j p_k$ и так далее, то

$$|A| = \sum_i \frac{n}{p_i} - \sum_{i<j} \frac{n}{p_i p_j} + \sum_{i<j<k} \frac{n}{p_i p_j p_k} - \ldots + (-1)^{m+1} \frac{n}{p_1 \cdot \ldots \cdot p_m}.$$

Теперь

$$\varphi(n) = n - |A| = \left(n - \sum_i \frac{n}{p_i} + \sum_{i<j} \frac{n}{p_i p_j} + \ldots + (-1)^m \frac{n}{p_1 \cdot \ldots \cdot p_m} \right) = n \cdot \prod_{i=1}^{m} \left(1 - \frac{1}{p_i} \right).$$

Например,

$$\varphi(100) = 100 \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \right) \left(1 - \frac{1}{5} \right) = 40.$$