Лекция 3. Числа Каталана. Продолжение

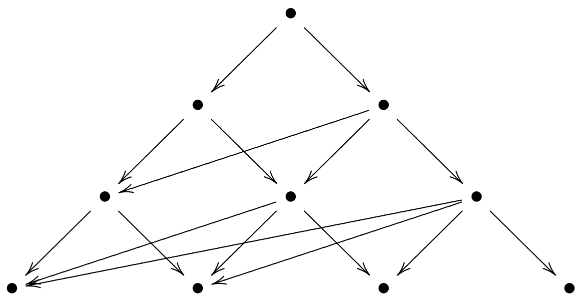
Треугольник чисел Каталана

Числовой треугольник, похожий на треугольник Паскаля, позволяет вычислять числа Каталана. Треугольник строится так. Вверху стоит единица. Элемент в n-й строке треугольника равен сумме элементов из $(n-1)$-й строки, стоящих правее вычисляемого элемента, плюс элемент из $(n-1)$-й строки, стоящий непосредственно левее.

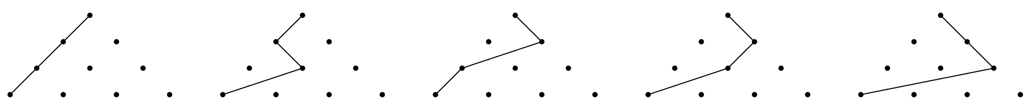
$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 2 & & 2 & & 1 & & \\
 & 5 & & 5 & & 3 & & 1 & \\
14 & & 14 & & 9 & & 4 & & 1
\end{array}$$

Теорема 1. *Числа Каталана стоят вдоль левой стороны треугольника.*

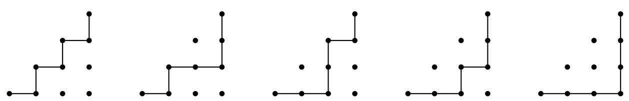
Доказательство. Все числа в треугольнике порождаются верхней единицей. Верхняя единица делает столько вкладов в каждый элемент сколько есть путей вдоль стрелок из вершины в данную позицию в ориентированном графе ниже.



Например, из вершины в левую позицию четвертого ряда ведут пять путей:



Мы сопоставляем этим путям правильные пути в квадрате 3×3. Правило соответствия показано на рисунке ниже.



Дадим точное описание правила соответствия. Пронумеруем элементы в каждой строке справа налево. Каждый элемент в треугольнике имеет две координаты (i, j), $i \geqslant 0$, $j \geqslant 0$, $j \leqslant i$: i — номер строки (мы считаем, что верхняя единица находится нулевом ряду), j — номер позиции в строке. Из позиции с координатами (i, j) стрелки ведут в позиции с координатами $(i+1, k)$, $k \geqslant j$. Пути в треугольнике из точки $(0, 0)$ в точку (n, n) мы сопоставляем правильный путь в квадрате $[0, n] \times [0, n]$. Каждый следующий отрезок пути в треугольнике добавляет к уже построенному пути в квадрате два отрезка: горизонтальный длины 1, а затем вертикальный длины $k - j$ (если отрезок ведет из точки (i, j) в $(i + 1, k)$. Это правило и задает взаимно однозначное соответствие между путями в треугольнике и правильными путями в квадрате. Осталось заметить, что число Каталана и есть число правильных путей в квадрате. □

Бесконечные степенные ряды

Бесконечным степенным рядом называется выражение

$$a_0 + a_1\,t + a_2\,t^2 + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} a_i\,t^i.$$

Допустимо работать и с расходящимися рядами.
<u>Сложение рядов.</u>

$$(a_0 + a_1\,t + a_2\,t^2 + \cdots) + (b_0 + b_1\,t + b_2\,t^2 + \cdots) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)t + (a_2 + b_2)t^2 + \cdots$$

Умножение рядов.

$(a_0 + a_1\,t + a_2\,t^2 + \cdots) \times (b_0 + b_1\,t + b_2\,t^2 + \cdots) = (a_0 \cdot b_0) + (a_0 \cdot b_1 + a_1 \cdot b_0)t + (a_0 \cdot b_2 + a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_0)t^2 + \cdots$

Обращение ряда. Если $a_0 \neq 0$, то ряд $a_0 + a_1\,t + a_2\,t^2 + \cdots$ можно обратить, т.е.найти такой ряд $b_0 + b_1\,t + b_2\,t^2 + \cdots$, что

$$(a_0 + a_1\,t + a_2\,t^2 + \cdots) \times (b_0 + b_1\,t + b_2\,t^2 + \cdots) = 1.$$

Это означает выполнение равенств

$$\begin{aligned}
&a_0 \cdot b_0 = 1\\
&a_0 \cdot b_1 + a_1 \cdot b_0 = 0\\
&a_0 \cdot b_2 + a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_0 = 0\\
&\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots
\end{aligned}$$

Эти равенства позволяют последовательно находить сначала b_0, затем b_1, затем b_2 и т.д. Как правило, в наших задачах $a_0 = 1$.

Пример. Обратим ряд

$$1 + 2t + 3t^2 + 4t^3 + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty}(i+1)t^i.$$

Система для вычисления обратного ряда выглядит так:

$$\begin{aligned}
&b_0 = 1\\
&b_1 + 2b_0 = 0\\
&b_2 + 2b_1 + 3b_0 = 0\\
&b_3 + 2b_2 + 3b_1 + 4b_0 = 0\\
&\quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots
\end{aligned}$$

Получаем, что $b_0 = 1$, $b_1 = -2$, $b_2 = 1$, $b_3 = b_4 = \cdots = 0$. Т.е. обратный ряд оказался конечным: $1 - 2t + t^2$.

Решение уравнений

Рассмотрим задачу о нахождении числа целых неотрицательных решений уравнения

$$a_1x_1 + \cdots + a_kx_k = n.$$

Здесь a_i — целые положительные числа. Следует отметить, что хорошей формулы для числа решений (как в случае $a_1 = \ldots = a_k = 1$) не существует. Рассмотрим, например, уравнение $x_1 + x_2 + 2x_3 = n$. Если n четно $n = 2m$, то может x_3 принимать значения от 0 до m. Если $x_3 = s$, то уравнение имеет $2m - 2s + 1$ решений. Следовательно, общее число решений равно

$$1 + 3 + 5 + \cdots + 2m + 1 = (m+1)^2 = (1 + n/2)^2.$$

Если n нечетно $n = 2m - 1$, то x_3 может принимать значения от 0 до $m - 1$. Если $x_3 = s$, то уравнение имеет $2m - 2s$ решений. Следовательно, общее число решений равно

$$2 + 4 + \cdots + 2m = m(m+1) = \frac{(n+1)(n+3)}{4}.$$

Мы видим, что ответ зависит от четности числа n. В общем случае ответ должен учитывать остатки от деления числа n на числа a_i.

Рассмотрим произведение бесконечных рядов

$$(1 + t^{a_1} + t^{2a_1} + t^{3a_1} + \cdots) \times (1 + t^{a_2} + t^{2a_2} + t^{3a_2} + \cdots) \times \ldots$$
$$\ldots \times (1 + t^{a_k} + t^{2a_k} + t^{3a_k} + \cdots) = 1 + b_1t + b_2t^2 + \cdots.$$

Коэффициент b_n в точности равен числу целых неотрицательных решений уравнения $a_1x_1 + \cdots + a_kx_k = n$. Действительно, коэффициент b_n равен количеству способов так выбрать слагаемые в k рядах, что их произведение дает t^n. Но каждое слагаемое каждого ряда — это некоторая степень переменной t. При их умножении степени складываются. Следовательно, коэффициент b_n равен количеству способов так выбрать слагаемые в k рядах, что сумма их степеней равна n. Степень слагаемого первого ряда делится на a_1, т.е. она равна a_1x_1 для некоторого x_1. Аналогично, степень слагаемого второго ряда равна a_2x_2 для некоторого x_2, и так далее. Другими словами, коэффициент b_n равен количеству способов выбрать целые неотрицательные числа x_i так, чтобы выполнялось равенство $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = n$, т.е. он равен числу решений нашего уравнения.

Преобразуем произведение рядов. Так как каждый ряд представляет собой геометрическую прогрессию, то

$$(1 + t^{a_1} + t^{2a_1} + \cdots) \times \ldots \times (1 + t^{a_k} + t^{2a_k} + \cdots) = \frac{1}{1 - t^{a_1}} \times \frac{1}{1 - t^{a_2}} \times \cdots \times \frac{1}{1 - t^{a_k}}.$$

Другими словами, ряд $1 + b_1t + b_2t^2 + \cdots$ — это обратный ряд для многочлена $(1 - t^{a_1}) \times \ldots \times (1 - t^{a_k})$.

Пример. Найдем число целых неотрицательных решений уравнения

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 12.$$

Для этого мы должны обратить многочлен

$$(1-t)(1-t^2)(1-t^3)(1-t^4) = 1 - t - t^2 + 2t^5 - t^8 - t^9 + t^{10}.$$

Умножим этот многочлен на ряд $1 + b_1 t + b_2 t^2 + \cdots$ и приравняем нулю коэффициенты произведения от первого до двенадцатого. Это даст нам систему

$$\begin{aligned}
&b_1 - 1 = 0\\
&b_1 - b_2 + 1 = 0\\
&b_1 + b_2 - b_3 = 0\\
&b_2 + b_3 - b_4 = 0\\
&b_3 + b_4 - b_5 - 2 = 0\\
&2b_1 - b_4 - b_5 + b_6 = 0\\
&2b_2 - b_5 - b_6 + b_7 = 0\\
&2b_3 - b_6 - b_7 + b_8 - 1 = 0\\
&b_1 - 2b_4 + b_7 + b_8 - b_9 + 1 = 0\\
&b_1 + b_2 - 2b_5 + b_8 + b_9 - b_{10} - 1 = 0\\
&b_1 - b_2 - b_3 + 2b_6 - b_9 - b_{10} + b_{11} = 0\\
&b_2 - b_3 - b_4 + 2b_7 - b_{10} - b_{11} + b_{12} = 0
\end{aligned}$$

Последовательно вычисляя коэффициенты b_1, b_2, b_3 и так далее, мы находим, что $b_{12} = 34$.