Лекция 2. Числа Каталана

Существуют десятки определений чисел Каталана. Вот одно из них. Рассмотрим выражение $2+3\times 4-5$. Понятно, что для того, чтобы произвести вычисления в этом выражении, мы должны определить порядок выполнения операций. Сколькими способами это можно сделать? В нашем случае — пятью:

$$\begin{gathered}((2+3)\times 4)-5=15\\ (2+3)\times(4-5)=-5\\ (2+(3\times 4))-5=9\\ 2+((3\times 4)-5)=9\\ 2+(3\times(4-5))=-1\end{gathered}$$

Число Каталана C_{n-1} — это количество способов вычислить выражение $a_1 * \cdots * a_n$, где звездочка обозначает операцию, а $a_1,\ldots,a_n$ — некоторые числа. (Мы нашли, что $C_3=5$).

Оказывается, что C_n — это количество „правильных “ скобочных структур из $2n$ скобок (n открывающих и n закрывающих). Скобочная структура называется *правильной*, если в любом левом отрезке структуры количество закрывающих скобок не превышает количества открывающих. Например, структура $((()())())$ — правильная, а структура $(()())())(()$ — нет (в левом отрезке из 9-ти скобок открывающих — 4, а закрывающих — 5).

Правильных скобочных структур из шести скобок — пять. Вот они:

$$((())),\quad (()()),\quad (())(),\quad ()(()),\quad ()()().$$

Докажем сформулированное выше утверждение. Рассмотрим выражение, котором n переменных связаны $(n-1)$-м знаком операций. В этом выражении расставлены скобки (их $2n-2$, включая и самые внешние), которые указывают на порядок выполнения операций. Например, так: $(((a_1*a_2)*a_3)*a_4)$. Такому выражению мы поставим в соответствие скобочную структуру по правилу: мы оставляем открывающие скобки, вместо знаков операций ставим закрывающие скобки, а остальные символы удаляем. Вот как это выглядит для $n=3$:

$$\begin{array}{lcl}(((a_1*a_2)*a_3)*a_4) & \Rightarrow & ((()))\\ ((a_1*(a_2*a_3))*a_4) & \Rightarrow & (()())\\ ((a_1*a_2)*(a_3*a_4)) & \Rightarrow & (())()\\ (a_1*((a_2*a_3)*a_4)) & \Rightarrow & ()(())\\ (a_1*(a_2*(a_3*a_4))) & \Rightarrow & ()()()\end{array}$$

Восстановление выражения по скобочной структуре производится так. Вместо закрывающих скобок ставим знаки операций. Если в полученной строке есть два знака $*$ подряд, то рассмотрим первое появление фрагмента $(**$. Это означает, что в выражении в этом месте стоит фрагмент $(a*a)$. Удалим фрагмент $(*$ и запомним, что в соответствующем месте должен стоять не операнд a, но фрагмент $(a*a)$, продолжим преобразование.

Пример. Преобразуем скобочную структуру $((()())())$.

$$((()())()) \Rightarrow (((*(**(** \Rightarrow (((*.*(**$$

Здесь точка указывает, что в этом месте в выражении будет стоять $(a*a)$. Продолжаем.

$$(((*.*(** \Rightarrow ((..*(**$$

Здесь две точки указывают, что в выражении в этом месте будет стоять $(a*(a*a))$. Продолжаем.

$$((..*(** \Rightarrow ((..*.* \Rightarrow (...*$$

Здесь три точки указывают, что в выражении в э том месте будет стоять фрагмент $((a*(a*a))*(a*a))$. Окончательно получаем $(((a*(a*a))*(a*a))*a)$. Обратное преобразование

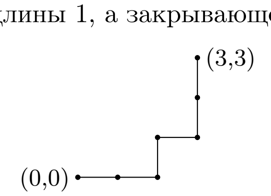
$$(((a*(a*a))*(a*a))*a) \Rightarrow ((()())())$$

дает нам исходную скобочную структуру.

Если же в строке нет двух знаков $*$ подряд, то строка имеет вид $(*(*(*\cdots$ и ей отвечает выражение $(a*(a*(a*(a*\cdots$.

Правильной скобочной структуре из $2n$ открывающих и $2n$ закрывающих скобок мы поставим в соответствие путь в квадрате $[0,n]\times[0,n]$. Путь начинается в точке (0,0) и заканчивается в точке (n,n). Открывающей скобке мы сопоставляем горизонтальный отрезок длины 1, а закрывающей — вертикальный.

$(()())\quad\Longrightarrow$



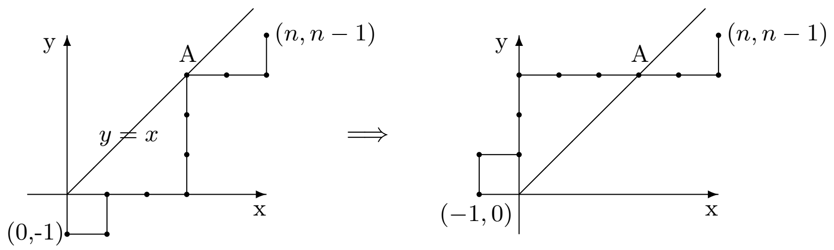
Если путь сопоставлен правильной структуре, то ни одна его точка не может лежать выше главной диагонали квадрата. Обратно, такому пути („правильному пути“) сопоставляется правильная скобочная структура. Геометрическое представление правильных скобочных структур позволяет найти выражение для чисел Каталана.

Теорема 1. $C_n = C_{2n+1}^n/(2n+1)$.

Доказательство. Сместим правильный путь на 1 клетку вниз. Теперь правильный путь начинается в точке $(0,-1)$, заканчивается в точке $(n, n-1)$ и не имеет общих точек с прямой $y = x$ — биссектрисой первого квадранта. Нам нужно найти количество правильных путей. Для этого мы найдем количество *неправильных*, и из общего числа путей вычтем количество неправильных.

Мы рассматриваем пути из точки $(0,-1)$ в точку $(n, n-1)$. Длина такого пути равна $2n$ и он содержит n вертикальных сегментов и n горизонтальных. Количество всех таких путей равно числу способов выбрать n вертикальных сегментов из общего числа $2n$ сегментов, т.е. равно C_{2n}^n.

Рассмотрим неправильный путь и его первую точку на прямой $y = x$ (точка A). Отрезок пути от точки $(0,-1)$ до точки A заменим симметричным относительно прямой $y = x$. Мы получим путь длины $2n$, идущий из точки $(-1,0)$ в точку $(n, n-1)$.



Такой путь обязательно пересекает прямую $y = x$.

Обратно, пусть нам дан путь длины $2n$ из точки $(-1,0)$ в точку $(n, n-1)$ и пусть A — первая точка этого пути, лежащая на прямой $y = x$. Заменив участок пути от точки $(-1,0)$ до точки A на симметричный относительно прямой $y = x$, мы получим неправильный путь из точки $(0,-1)$ в точку $(n, n-1)$. Следовательно, неправильных путей из точки $(0,-1)$ в точку $(n, n-1)$ столько же, сколько путей из точки $(-1,0)$ в точку $(n, n-1)$. Такой путь длины содержит $n+1$ горизонтальных и $n-1$ вертикальных участков. Поэтому, количество таких путей равно C_{2n}^{n-1}. Значит, количество правильных путей (т.е. число Каталана C_n) равно

$$C_n = C_{2n}^n - C_{2n}^{n-1} = \frac{(2n)!}{n!\,n!} - \frac{(2n)!}{(n+1)!\,(n-1)!} = \frac{(2n)!}{n!\,(n+1)!} = \frac{1}{2n+1}\,C_{2n+1}^n.$$

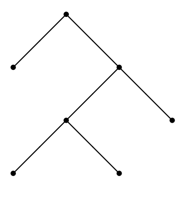
□

Замечание. Формула дает, что

$$C_2 = 2, \quad C_3 = 5, \quad C_4 = 14, \quad C_5 = 42, \quad C_6 = 132.$$

Другие определения чисел Каталана

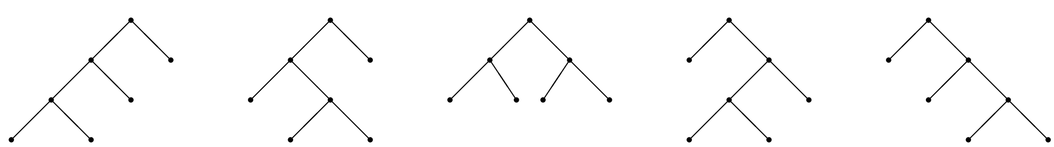
Бинарные деревья. *Бинарными деревьями* с фиксированной корневой вершиной называются графы вида



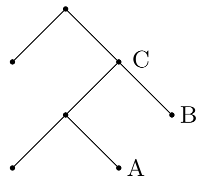
— дерево „растет“ сверху вниз, из самой верхней вершины выходят 2 ребра вниз, из других вершин либо выходит одно ребро вверх, либо три ребра — одно вверх и два вниз. Вершины степени 1 (т.е. вершины, из которых выходит одно ребро вверх) мы будем называть концевыми.

Теорема 1. *Количество бинарных деревьев с n концевыми вершинами равно C_{n-1}.*

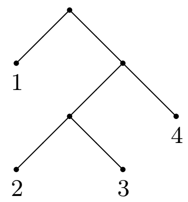
Пример. Всего имеется 5 бинарных деревьев с 4-мя концевыми вершинами:



Доказательство. Занумеруем концевые вершины бинарного дерева числами от 1 до n следующим образом. Пусть A и B — две концевые вершины. Будем подыматься по дереву от A и B вверх, пока не дойдем до вершины C, в которой пути подъема соединятся.



Тогда один путь идет из точки C влево и вниз, а второй — вправо и вниз. Теперь из точек A и B та имеет меньший номер, путь в которую из точки C идет влево и вниз.



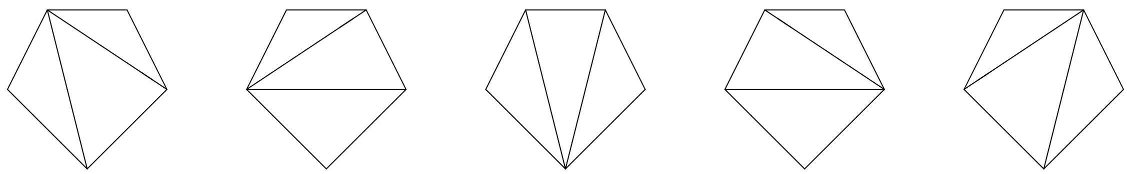
Сопоставим дереву строку из n операндов $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, соединенных знаками операций, в которой расставлены скобки, указывающие на порядок выполнения операций.

Расстановка скобок идет снизу вверх. Пусть скобки расставлены для всех вершин уровня k. Для каждой вершины уровня $k-1$ и степени 3 делаем следующее: выражения для вершин справа и слева уровня k заключаем в скобки (только если соответствующая вершина имеет степень 3) и ставим между скобками знак операции. Так для дерева выше процедура расстановки скобок такова:

$$a_1\, a_2\, a_3\, a_4 \quad\Rightarrow\quad a_1\, a_2 * a_3\, a_4 \quad\Rightarrow\quad a_1\,(a_2 * a_3) * a_4 \quad\Rightarrow\quad a_1 * ((a_2 * a_3) * a_4).$$

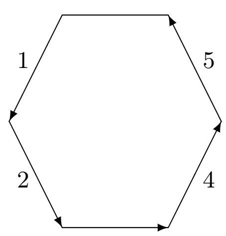
Теперь очевидно, что эта конструкция реализует взаимно-однозначное соответствие между бинарными деревьями с n концевыми вершинами и выражениями из n операндов. □

Разбиения выпуклых многоугольников. Рассмотрим выпуклый n-угольник на плоскости. Скольким способами его можно разбить на треугольники непересекающимися диагоналями? Так как сумма углов выпуклого n-угольника равна $\pi(n-2)$, то непересекающиеся диагонали разбивают его на $n-2$ треугольника. Пятиугольник на три треугольника можно разбить пятью способами.



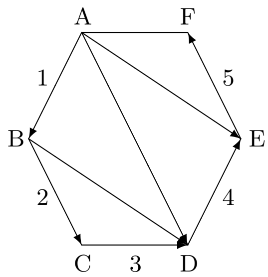
Теорема 2. *Количество разбиений выпуклого $(n+2)$-угольника на n треугольников непересекающимися диагоналями равно числу Каталана C_n.*

Доказательство. Занумеруем стороны $(n+2)$-угольника числами от 1 до $n+1$ в порядке обхода против часовой стрелки, при этом верхней стороне номер не приписывается. На каждой стороне поставим стрелку, указывающую на порядок обхода.



Рассмотрим $n+1$ операндов $a_1, \ldots, a_{n+1}$ и цепочку арифметических операций $a_1 * a_2 * \ldots * a_{n+1}$. Зададим порядок выполнения этих операций. Сопоставим этому набору данных разбиение $(n+2)$-угольника на треугольники. Рассмотрим самые внутренние скобки, заключающие 2 операнда. Такой скобке $(a_i * a_{i+1})$ мы сопоставим диагональ, соединяющую начало i-й стороны с концом $(i+1)$-й. На этой диагонали поставим стрелку, указывающую на порядок обхода, и обозначим диагональ парой $(i, i+1)$. Рассмотрим операции, выполняющиеся во вторую очередь. Здесь возможны три случая: $(a_{i-1} * (a_i * a_{i+1}))$, $((a_i * a_{i+1}) * a_{i+2})$ и $((a_{i-2} * a_{i-1}) * (a_i * a_{i+1}))$. В первом случае соединим диагональю начало $(i-1)$-й стороны и конец $(i, i+1)$-й диагонали, поставим на новой диагонали стрелку и обозначим диагональ тройкой $(i-1,(i,i+1))$. Во втором случае соединим диагональю начало $(i,i+1)$-й диагонали и конец $(i+2)$-й стороны, поставим на новой диагонали стрелку и обозначим диагональ тройкой $((i,i+1),i+2)$. В третьем случае соединим диагональю начало $(i-2,i-1)$-й диагонали и конец $(i,i+1)$-й диагонали, поставим на новой диагонали стрелку и обозначим диагональ четверкой $((i-2,i-1),(i,i+1))$. И так далее.

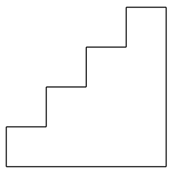
Пример. Вот разбиение 6-угольника отвечающее цепочке операций $((a_1*(a_2*a_3))*a_4)*a_5$.



Сначала мы строим диагональ BD и обозначаем ее парой $(2,3)$. Потом мы строим диагональ AD и обозначаем ее тройкой $(1,(2,3))$. И, наконец, мы строим диагональ AE и обозначаем ее четверкой $(((1,(2,3)),4)$.

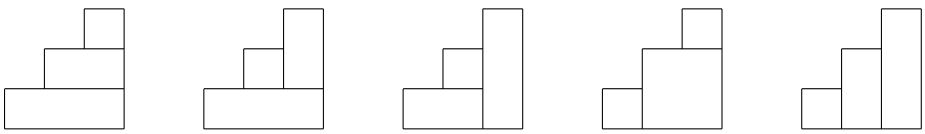
Очевидно, что эта процедура устанавливает взаимно-однозначное соответствие между множеством порядков выполнения цепочки операций $a_1*\ldots*a_n$ и множеством разбиений выпуклого $(n+1)$-угольника. Так как в первом множестве имеется C_n элементов, то и во втором количество элементов также равно C_n. $\square$

Заполнения „лесенки“. Рассмотрим нарисованную на клетчатой бумаге „лесенку“ ширины и высоты n.



Сколькими способами можно заполнить такую лесенку n прямоугольниками?

Пример. Вот все способы заполнить 3-лесенку тремя прямоугольниками.



Теорема 3. *Количество способов заполнить n-лесенку n прямоугольниками равно числу Каталана C_n.*

Доказательство. Каждый угол лесенки заполняет свой прямоугольник. Будем считать, что основание лесенки занимает отрезок $[0,n]$. Пусть P_i — прямоугольник, заполняющий i-й угол, тогда его левая сторона имеет x-координату $i-1$, а правая — пусть некоторую x-координату n_i. Тогда если $i<j$, то либо $n_j \leqslant n_i$, либо $j \geqslant n_i$. В противном случае внутри лесенки возникнет угол, и понадобится $(n+1)$-й прямоугольник для его заполнения. Таким образом проекция j-го прямоугольника на ось OX либо целиком лежит внутри проекции i-го, либо целиком вне.

Сопоставим заполнению правильную скобочную структуру следующим образом: Сопоставим i-му прямоугольнику i-ю открывающую скобку и соответствующую ей закрывающую. Пусть $j>i$, тогда j-я пара скобок лежит внутри i-й, если x-проекция j-го прямоугольника лежит внутри x-проекции i-го, и вне, если если x-проекция j-го прямоугольника лежит вне x-проекции i-го.

Скобочные структуры, отвечающие заполнениям 3-лесенки выше, таковы:

$$((())),\quad (()()),\quad ,(())(),\quad ()(()),\quad ()()().$$

А вот заполнение 5-лесенки, отвечающее скобочной структуре $(()((())))$: