Лекция 10. Графы

Доказательство теоремы Пойя

Продолжим обсуждение теоремы Пойя, начатое на прошлой лекции.

Группа G действует на множестве M. Множество X — это совокупность всех раскрасок элементов из M (позиций) в r цветов. Тогда группа G действует и на X. Сопоставим i-му цвету переменную x_i, а раскраске $x \in X$ — одночлен (вес) $p_x = x_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot x_r^{k_r}$, где k_i — число позиций, закрашенных в i-й цвет. Легко видеть, что если раскраски x и y лежат в одной орбите O, то $p_x = p_y$. Положим $p_O = p_x$, $x \in O$, и определим производящий ряд действия группы G на множестве X:

$$C(x_1, \ldots, x_r) = \sum_{i=1}^{s} p_{O_i}(x_1, \ldots, x_r),$$

где $O_1, \ldots, O_s$ — все орбиты действия G на X.

Теорема 3 (теорема Пойя).

$$C(x_1, \ldots, x_r) = Z(G)(c_1, \ldots, c_m).$$

Доказательство. Рассмотрим элемент $g \in G$ и опишем множество $\mathrm{Fix}_g \subset X$. Перестановка, которую g задает на M, раскладывается в произведение независимых циклов $M_1, \ldots, M_t$, длин $d_1, \ldots, d_t$, соответственно. Если $x \in \mathrm{Fix}_g$ и $m_1, m_2 \in M_i$, то в раскраске x позиции m_1 и m_2 раскрашены одинаково. Это означает, что

$$p_x = x_{i_1}^{d_1} \cdot \ldots \cdot x_{i_t}^{d_t},$$

где i_1 — номер цвета, в который раскрашены все позиции $m \in M_1$, i_2 — номер цвета, в который раскрашены все позиции $m \in M_2$, и так далее. Сумма одночленов p_x по всем $x \in \mathrm{Fix}_g$ в точности равна

$$(x_1^{d_1} + \ldots + x_r^{d_1})(x_1^{d_2} + \ldots + x_r^{d_2}) \cdots (x_1^{d_t} + \ldots + x_r^{d_t}).$$

А, суммируя по всем $g \in G$, получим $Z(G)(c_1, \ldots, c_m)$. Но по теореме Бернсайда с весами эта сумма равна производящему ряду для орбит. $\square$

Графы

Графом G мы будем называть объект, состоящий из двух конечных множеств: множества *вершин* V и множества *ребер* E: $G = (V, E)$. Ребро *соединяет* две вершины графа, которые мы будем называть *концевыми* вершинами этого ребра. Мы будем считать, что для каждого ребра его концевые вершины *различны* (т.е. граф не содержит петель) и что две различные вершины могут быть соединены лишь одним ребром (или не соединены). Если вершина $v \in V$ является концевой вершиной ребра $e \in E$, то мы будем называть ребро e и вершину v *инцидентными*. Если вершины v_1 и v_2 являются концевыми вершинами ребра e, то эти вершины мы будем называть *смежными*.

Количество ребер, инцидентных вершине v, мы будем называть *степенью* этой вершины.

Замечание. Графы удобно изображать на плоскости: вершины — точками, ребра — дугами, соединяющими точки-вершины.

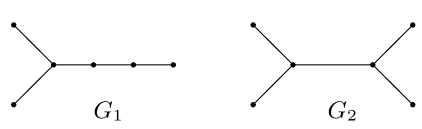
Определение 1. Два графа $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$ называются *изоморфными*, если существует такое взаимно однозначное отображение $f : V_1 \to V_2$, для которого вершины $a, b \in V_1$ смежны в G_1 в том и только том случае, когда вершины $f(a), f(b) \in V_2$ смежны в G_2.

Замечание. Если графы G_1 и G_2 изоморфны, то количество вершин в G_1 равно количеству вершин в G_2 ($|V_1| = |V_2|$) и количество ребер в G_1 равно количеству ребер в G_2 ($|E_1| = |E_2|$).

Лемма 1. *Пусть графы G_1 и G_2 изоморфны, $f : V_1 \to V_2$ — соответствующее отображение и $f(v) = u$. Тогда степень вершины v равна степени вершины u.*

Доказательство. Пусть $v_1, \ldots, v_k \in V_1$ — вершины, смежные вершине v, а $u_1, \ldots, u_l$ — вершины, смежные вершине u. Тогда отображение f сопоставляет вершине $v_i, i =\in \{1, \ldots, k\}$ какую-то вершину $u_j, j \in \{1, \ldots, l\}$. Кроме того, каждой вершине u_j сопоставлена некоторая вершина v_k. Утверждение леммы вытекает из взаимной однозначности отображения f. $\square$

Пример. Графы G_1 и G_2



не изоморфны (хотя у них по шесть вершин и по пять ребер), потому что у графа G_1 есть только одна вершина степени 3, а у графа G_2 — их две.

Пример. Графы G_1 и G_2

G_1 $\qquad$ G_2

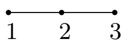
не изоморфны (здесь каждый граф имеет одну вершину степени 3, две вершины степени два и две вершины степени один). Действительно, если эти графы изоморфны, то отображение сопоставляет вершине степени 3 в первом графе вершину степени 3 во втором. При этом вершинам, смежным вершине степени 3 в первом графе, сопоставляются вершины, смежные вершине степени 3 во втором. Но в первом графе среди этих трех вершин одна имеет степень 1 и две — степень 2, а во втором графе — две имеют степень 1 и одна — степень 2.

Для работы с графами (особенно в случае компьютерной поддержки такой работы) граф удобно описывать *матрицей смежности.*

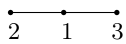
Определение 2. Перенумеруем произвольным образом вершины графа $G = (V, E)$, $|V| = n$. Матрицей смежности графа G называется $n \times n$-матрица A, где элемент a_{ij} равен единице, если вершины v_i и v_j соединены ребром, и нулю — в противном случае.

Замечание. Матрица смежности симметрична: $A^t = A$. На ее главной диагонали стоят нули: $a_{ii} = 0$. Так как существует $n!$ нумераций вершин графа, то у графа есть $n!$ матриц смежности (некоторые из них могут совпадать).

Пример. Вот две нумерации одного и того же графа и соответствующие матрицы смежности:



$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Лемма 2. *Два графа G_1 и G_2 изоморфны в том и только том случае, когда найдутся нумерации вершин первого и второго графа, для которых соответствующие матрицы смежности совпадают.*

Доказательство. Пусть графы изоморфны, и $f : V_1 \to V_2$ — соответствующее взаимно-однозначное отображение. Произвольным образом занумеруем вершины первого графа, а вершине $f(v) = u \in V_2$ припишем тот же номер, что и вершине $v \in V_1$. Тогда матрицы смежности совпадут.

Обратно. Если матрицы смежности совпали при некоторых нумерациях множеств вершин V_1 и V_2, то отображение f определим так: вершине $v \in V_1$ с номером i мы сопоставим вершину $u \in V_2$ с тем же номером. $\square$

Путем в графе $G = (V, E)$, соединяющем вершины $v, v' \in V$, называется последовательность вершин $v_1, \dots, v_n \in V$ такая, что пары вершин v и v_1, v_1 и v_2, ... , v_{n-1} и v_n и, наконец, v_n и v' смежны. Другими словами (если граф изображен на плоскости), существует последовательность ребер, начинающаяся в вершине v и заканчивающаяся в вершине v', причем каждое ребро входит в вершину, из которой выходит следующее ребро. Путь называется *простым*, если в последовательности вершин $v_1, \dots, v_n$ все вершины попарно различны. Пусть в графе называется *циклом*, если первая и последняя вершины пути совпадают и, кроме того, каждое ребро в пути проходится только один раз. Цикл называется *простым*, если все вершины $v_1, \dots, v_{n-1}$ попарно различны.

Определение 3. Граф называется *связным*, если любые две его вершины можно соединить путем.

Главным образом мы будет рассматривать именно связные графы.