Лекция 9. Группы преобразований

Мы говорим, что конечная группа G действует на множестве X (или является *группой преобразований* множества X), если каждому элементу $g \in G$ сопоставлена биекция (т.е. взаимно-однозначное отображение) $\varphi_g : X \to X$, причем $\varphi_{g_1 g_2} = \varphi_{g_1} \circ \varphi_{g_2}$ (т.е. отображение, отвечающее произведению $g_1 g_2$, есть композиция отображений φ_{g_1} и φ_{g_2}). При этом φ_e — тождественное отображение. Элемент $\varphi_g(x) \in X$ мы будем обозначать просто $g(x)$. Далее через $|M|$ мы будем обозначать число элементов любого множества M.

Орбитой O_x элемента $x \in X$ называется множество $\{g(x), g \in G\} \subset X$. *Стабилизатором* St_x элемента $x \in X$ называется множество $\{g \in G | g(x) = x\} \subset G$.

Лемма 1. *Стабилизатор любого элемента $x \in X$ является подгруппой в G.*

Доказательство. Очевидно. □

Лемма 2. $|O_x| = |G|/|\mathrm{St}_x|$.

Доказательство. Обозначим через H стабилизатор элемента x. Пусть gh_1 и gh_2 — два элемента из одного левого смежного класса G по H (здесь $g \in G$, $h_1 \in H$, $h_2 \in H$). Тогда $g(x) = g(h_1(x)) = g(h_2(x))$, т.е. элементы из одного смежного класса переводят x в один и тот элемент. С другой стороны, если $g_1(x) = g_2(x)$, то $g_2^{-1}(g_1(x)) = x$ и $g_2^{-1} g_1 = h \in H$. Значит, $g_1 = g_2 h$, т.е. элементы и принадлежат одному левому смежному классу. Таким образом, число элементов в орбите равно числу смежных классов. Но это число равно $|O_x| = |G|/|\mathrm{St}_x|$. □

Лемма 3. *Пусть $y \in O_x$, тогда* $|\mathrm{St}_x| = |\mathrm{St}_y|$.

Доказательство. Как и выше, обозначим через H стабилизатор элемента x. Пусть $y = g(x)$ и пусть $g_1(y) = y$. Тогда $g^{-1} g_1 g(x) = x$. Следовательно, $g^{-1} g_1 g \in H$. Мы видим, что $\mathrm{St}_y = g^{-1} H g$, но $|g^{-1} H g| = |H|$. □

И последнее: две орбиты либо совпадают, либо не пересекаются. То-есть, множество X есть объединение нескольких непересекающихся орбит.

Лемма 4. *Если пересечение двух орбит O_x и O_y непусто, то $O_x = O_y$.*

Доказательство. Пусть $z \in O_x \cap O_y$, т.е. $z = g_1(x)$ и $z = g_2(y)$. Пусть $u = g(y)$ — некоторый элемент из O_y. Тогда $u = g(g_2^{-1}(g_1(x)))$, т.е. $u \in O_x$. Следовательно, $O_y \subset O_x$. Аналогично показываем, что $O_x \subset O_y$. Значит, $O_x = O_y$. □

Теперь мы можем вывести формулу для числа орбит. Обозначим через $\mathrm{Fix}_g \subset X$ множество элементов, которых отображение φ_g оставляет на месте: $\mathrm{Fix}_g = \{x \in X | g(x) = x\}$.

Теорема 1 (формула Бернсайда). *Число орбит действия конечной группы G на множестве X равно*

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\mathrm{Fix}_g|.$$

Доказательство. Пусть $O_1, \ldots, O_k$ — все орбиты действия G на X. Из Лемм 2 и 3 следует, что

$$|G| = \sum_{x \in O_i} |\mathrm{St}_x|.$$

Теперь, суммируя по всем орбитам, получаем, что

$$k\,|G| = \sum_{i=1}^{k} \sum_{x \in O_i} |\mathrm{St}_x| = \sum_{x \in X} |\mathrm{St}_x|.$$

С другой стороны, в сумме $\sum_{g \in G} |\mathrm{Fix}_g|$ элемент $x \in X$ встречается столько раз, сколько есть элементов $g \in G$, таких, что $g(x) = x$. Но это число равно $|\mathrm{St}_x|$, следовательно,

$$\sum_{g \in G} |\mathrm{Fix}_g| = \sum_{x \in X} |\mathrm{St}_x|.$$

Откуда и следует требуемая формула. □

Пример. Сколько есть разбиений числа 20 в сумму трех неотрицательных слагаемых? Пусть a_1, a_2, a_3 — неотрицательное решение уравнения

$$x_1 + x_2 + x_3 = 20.$$

Тогда наборы

$$(a_1, a_2, a_3),\ (a_1, a_3, a_2),\ (a_2, a_1, a_3),\ (a_2, a_3, a_1),\ (a_3, a_1, a_2),\ (a_3, a_2, a_1)$$

дают одно и то же разбиение. Мы видим, что на множестве X всех решений уравнения $x_1 + x_2 + x_3 = 20$ действует группа $G = S_3$ перестановок из трех элементов. Число разбиений — это число орбит этого действия. Мы знаем, что $|X| = C_{22}^2 = 231$. В группе S_3 шесть элементов: единичный, три транспозиции — (1,2), (1,3) и (2,3), и два 3-цикла — (1,2,3) и (1,3,2). Неподвижными элементами действия транспозиции (1,2) являются решения (a_1, a_2, a_3), для которых $a_1 = a_2$. Таких решений — 11 (аналогчно для транспозиций (1,3) и (2,3)).

Неподвижными элементами действия цикла (1,2,3) являются решения (a_1, a_2, a_3), для которых $a_1 = a_2 = a_3$. Таких решений нет (аналогично для цикла (1,3,2)). Итак, получаем, что

$$\text{число орбит} = \frac{1}{6}\,(231 + 3 \cdot 11) = 44.$$

Пример. Каркас правильной треугольной пирамиды сделан из шести стержней — трех белых и трех черных. Мы считаем, что две пирамиды одинаковы, если раскраски их ребер совмещаются вращением. Сколько таких раскрасок существует? Группа G — группа вращений пирамиды состоит из 12 элементов: единичного элемента, 8 вращений на $\pm 120^\circ$ относительно четырех прямых, соединяющих вершину с серединой противоположной грани и трех вращений на 180° относительно прямых, соединяющих середины противоположных ребер. Множество X — это множество раскрасок ребер *неподвижной пирамиды*: $|X| = C_6^3 = 20$. Каждое вращение на $\pm 120^\circ$ оставляет неподвижными две раскраски, а каждое вращение на 180° — четыре (при вращении на 180° два ребра переходят в себя, а четыре оставшиеся попарно переходят друг в друга). Следовательно,

$$\text{число орбит} = \frac{1}{12}\,(20 + 8 \cdot 2 + 3 \cdot 4) = 4.$$

Пример. Сколько есть ожерелий из шести бусин — двух красных, двух синих и двух зеленых. Эту задачу можно переформулировать как задачу о раскраске вершин правильного шестиугольника в три цвета. Множество X — это множество раскрасок вершин *неподвижного* шестиугольника, или, что то же самое, множество раскрасок вершин шестиугольника, вершины которого пронумерованы. Таких раскрасок $C_6^2 C_4^2 = 90$, т.е. $|X| = 90$. Группа G — это группа вращений шестиугольника. Она состоит из

- единичного вращения;
- двух вращений на $\pm 60^\circ$;
- двух вращений на $\pm 120^\circ$;
- вращения на 180°;
- трех вращений на 180° относительно осей, соединяющих противоположные вершины;
- трех вращений на 180° относительно осей, соединяющих середины противоположных сторон.

Таким образом $|G| = 12$. Следовательно,

$$\text{число орбит} = \frac{1}{12}\,(90 + 2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 6 + 3 \cdot 6 + 3 \cdot 6) = 11.$$

Нам понадобится уточнение формулы Бернсайда. Будем считать, что каждому элементу $x \in X$ приписан *вес* $w(x)$, причем веса двух элементов из одной орбиты совпадают. *Вес орбиты* мы будем считать равным весу любого элемента из этой орбиты.

Замечание. Вес не обязательно является числом, но может быть вектором или символьным выражением.

Теорема 2 (формула Бернсайда с весами). *Пусть $O_1, \ldots, O_k$ — все орбиты действия группы G на множестве X, а $w(O_i)$ – вес i-й орбиты. Тогда*

$$|G| \sum_{i=1}^{k} w(O_i) = \sum_{g \in G} \sum_{x = g(x)} w(x).$$

Доказательство. Так как у всех элементов орбиты O_i одинаковый вес, то

$$|O_i| \cdot w(O_i) = \sum_{x \in O_i} w(x).$$

Но $|G| = |\mathrm{St}_x| \cdot |O_x|$. Поэтому

$$|G| \cdot w(O_i) = \sum_{x \in O_i} |\mathrm{St}_x| \cdot w(x).$$

Суммируя по всем орбитам. получаем, что

$$|G| \sum_{i=1}^{k} w(O_i) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{x \in O_i} |\mathrm{St}_x| \cdot w(x).$$

Теперь, как в доказательстве Теоремы 1, убеждаемся, что правая часть равна правой части равенства в формулировке теоремы. □

Изменим точку зрения на задачу о раскраске. Имеется множество M, на котором действует группа G. Всего имеется r различных цветов для раскраски элементов множества M. Совокупность используемых цветов образует множество R. Раскраска элементов M представляет собой функцию $f : M \to R$. В наших предыдущих обозначениях X — это множество всех раскрасок элементов множества M. Элемент $g \in G$ задает перестановку элементов множества M, но также задает и перестановку элементов множества X.

Будем считать, что задана нумерация элементов множества M. Рассмотрим цикловую запись перестановки элементов M, заданной элементом $g \in G$. Сопоставим этой перестановке одночлен

$$p_g(a_1, a_2, \ldots, a_m) = a_1^{d_1} a_2^{d_2} \cdot \ldots \cdot a_m^{d_m}.$$

Здесь m — число элементов множества M, $a_1, \ldots, a_m$ — переменные, а d_i, $i = 1, \ldots, m$, — число циклов длины i в цикловой записи перестановки g. Например, если $g = (1,2)(3)(4,5,6)(7)$, то

$$p_g(a_1, \ldots, a_7) = a_1^2 a_2 a_3.$$

Положим

$$Z(G)(a_1, \ldots, a_m) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} p_g(a_1, \ldots, a_m).$$

Многочлен $Z(G)$ называется *цикловым индексом* группы G.

Пример. Пусть M — это квадрат. Рассматривается задача о раскраске вершин квадрата (о „квадратном" ожерелье). Группа G состоит из:

- единичного вращения;
- двух вращений на $\pm 90°$;
- вращения на $\pm 180°$;
- двух вращений на $180°$ относительно осей, соединяющих противоположные вершины;
- двух вращений на $180°$ относительно осей, соединяющих середины противоположных сторон.

Вершины квадрата считаем пронумерованными. Каждый элемент группы G задает перестановку вершин квадрата, т.е. перестановку чисел $1, 2, 3, 4$. Вот эти перестановки в цикловой записи:

$$(1)(2)(3)(4);\ (1,2,3,4);\ (1,4,3,2);\ (1,3)(2,4);\ (1)(2,4)(3);\ (1,3)(2)(4);\ (1,2)(3,4);\ (1,4)(2,3).$$

Соответствующие одночлены равны

$$a_1^4,\ a_4,\ a_4,\ a_2^2,\ a_1^2 a_2,\ a_1^2 a_2,\ a_2^2,\ a_2^2.$$

Тогда

$$Z(G) = \frac{1}{8}\,(a_1^4 + 2a_1^2 a_2 + 3a_2^2 + 2a_4).$$

Сопоставим i-му цвету переменную x_i, и рассмотрим многочлены

$$c_1 = x_1 + \ldots + x_r, \quad c_2 = x_1^2 + \ldots + x_r^2, \quad \ldots, \quad c_m = x_1^m + \ldots + x_r^m.$$

Теперь рассмотрим орбиты действия группы G на множестве X. Каждому элементу $x \in X$, т.е. раскраске, мы сопоставляем одночлен

$$p_x(x_1, \ldots, x_r) = x_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot x_r^{k_r},$$

где k_i, $i = 1, \ldots, r$, — число элементов множества M, закрашенных i-м цветом. Очевидно, что если $y \in O_x$, то $p_x = p_y$. Для орбиты O определим одночлен $p_O = p_x$, где $x \in O$. Пусть $O_1, \ldots, O_s$ — все орбиты действия группы G на множестве X. Многочлен

$$C(x_1, \ldots, x_r) = \sum_{i=1}^{s} p_{O_i}(x_1, \ldots, x_r)$$

называется *производящим рядом* действия группы G на множестве X.

Теорема 3 (теорема Пойя).

$$C(x_1, \ldots, x_r) = Z(G)(c_1, \ldots, c_m).$$

Продолжение предыдущего примера. Рассмотрим раскраску вершин квадрата в три цвета: синий (переменная x), красный (переменная y) и зеленый (переменная z). Здесь

$$c_1 = x + y + z,\ c_2 = x^2 + y^2 + z^2,\ c_3 = x^3 + y^3 + z^3,\ c_4 = x^4 + y^4 + z^4.$$

Тогда

$$\begin{aligned} C(x,y,z) &= \frac{1}{8}\,(c_1^4 + 2c_1^2 c_2 + 3c_2^2 + 2c_4) = \\ &= x^4 + y^4 + z^4 + x^3 y + x^3 z + y^3 x + y^3 z + z^3 x + z^3 y + 2x^2 y^2 + 2x^2 z^2 + 2y^2 z^2 + 2x^2 yz + 2y^2 xz + 2z^2 xy. \end{aligned}$$

Это, в частности, означает, что имеется две *различные* раскраски вершин квадрата, так, чтобы две вершины были синие, одна — красная и одна — зеленая. Это нетрудно увидеть.