Лекция 1. Биномиальные коэффициенты

Комбинаторика — это раздел математики, связанный с перечислением. Вот типичные примеры комбинаторных задач:

- сколько целых положительных решений имеет уравнение $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = n$?
- чему равна сумма $1^k + 2^k + \cdots + n^k$?
- сколькими способами можно представить число n в виде суммы положительных слагаемых?
- сколько есть связных графов с n вершинами?

Комбинаторные задачи, как правило, довольно трудны. Мы обсудим лишь несколько самых простых.

Факториал

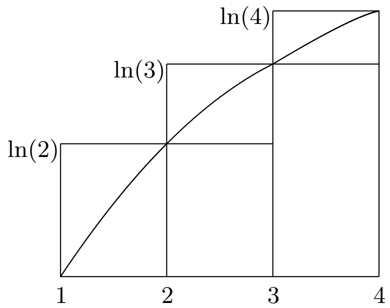
Факториал числа n — это произведение всех чисел $\leqslant n$: $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdot \times n$. Далее мы будем считать, что $0! = 1$.Понятно, что число $n!$ очень велико при больших n, но насколько велико? Например, сколько десятичных знаков в числе 100! ? (Современные компьютерные средства позволяют без труда получить ответ на это вопрос:

$$100! = 93326\,21544\,39441\,52681\,69923\,88562\,66700\,49071\,59682\,64381\,62146\,85929\,63895\,21759\,99932\,29915\,60894\,14639\,76156\,51828\,62536\,97920\,82722\,37582\,51185\,21091\,68640\,00000\,00000\,00000\,00000\,000 \approx 9.332 \cdot 10^{157}.)$$

Задача оценки, тем не менее, остается.

Предложение 1. $n! \approx \sqrt{n}\, n^n / e^{n-1}$.

Доказательство. Оценим величину $\ln(n!) = \ln(2) + \cdots + \ln(n)$.



На рисунке показан график функции $y = \ln(x)$ на отрезке $[1, 4]$. Сумма $\ln(2) + \ln(3) + \ln(4)$ — это сумма площадей трех прямоугольников. Кривая $y = \ln(x)$ лежит внутри цепочки маленьких прямоугольников, и площадь под кривой приблизительно равна $\ln(2) + \ln(3) + \ln(4)$ минус половина суммы площадей маленьких прямоугольников, т.е.,

$$\int_1^4 \ln(x)\, dx \approx \ln(2) + \ln(3) + \ln(4) - \frac{1}{2}\ln(4).$$

Аналогично

$$\ln(2) + \cdots + \ln(n) \approx \int_1^n \ln(x)\, dx + \frac{1}{2}\ln(n) = n\ln(n) - n + 1 + \frac{1}{2}\ln(n).$$

Следовательно,

$$n! \approx \sqrt{n}\, n^n / e^{n-1}.$$

□

Эта формула дает

$$100! \approx 10 \cdot 100^{100} / e^{99} \approx 1.01\, 10^{158},$$

что довольно близко к точному результату. Разумеется, наша оценка не является наилучшей. Более точная формула выглядит так:

$$n! \approx \frac{\sqrt{2\pi n}\, n^n}{e^n}.$$

Эта формула дает

$$100! \approx \frac{2\pi\, 10\, 100^{100}}{e^{100}} \approx 9.325\, 10^{157},$$

что заметно лучше ранее полученного приближения.

Биномиальные коэффициенты

Пусть у нас есть n различных предметов. Число способов выбрать k из них обозначается C_n^k и называется биномиальным коэффициентом (причина такого названия будет объяснена чуть ниже).

Предложение 2. $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Доказательство. Выберем один предмет из n. Это можно сделать n способами. Выбор второго предмета можно сделать $n-1$ способом, и так далее, выбор k-го предмета можно сделать $n-k+1$ способами. Таким образом, у нас вроде бы есть $n\cdot(n-1)\cdots(n-k+1)$ способ выбрать k предметов из n. Но наша конструкция дает не просто набор из k предметов, но *упорядоченный* набор (т.е. мы знаем какой предмет в этом наборе первый, какой — второй, и так далее). Другими словами, каждый набор мы считаем столько раз, сколько есть способов упорядочить набор из k предметов. Но таких упорядочений $k!$. Следовательно,

$$C_n^k = \frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

□

Замечание. $C_n^0 = C_n^n = 1$, $C_n^1 = n$, $C_n^2 = n(n-1)/2$, $C_n^k = C_n^{n-k}$.

Предложение 3. *Если $n = 2m$ четно, то*

$$C_{2m}^0 < C_{2m}^1 < C_{2m}^2 < \cdots < C_{2m}^{m-1} < C_{2m}^m > C_{2m}^{m+1} > \cdots > C_{2m}^{2m-1} > C_{2m}^{2m}.$$

Если $n = 2m+1$ нечетно, то

$$C_{2m+1}^0 < C_{2m+1}^1 < \cdots < C_{2m+1}^m = C_{2m+1}^{m+1} > \cdots > C_{2m+1}^{2m} > C_{2m+1}^{2m+1}.$$

Доказательство. Элементарно. □.

Насколько велик может быть биномиальный коэффициент? Оценим C_{2n}^n. Имеем

$$C_{2n}^n = \frac{(2n)!}{n!n!} \approx \frac{\sqrt{4\pi n}\,(2n)^{2n}\,e^n\,e^n}{2\pi n\,n^n\,n^n\,e^{2n}} = \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}.$$

Легко проверить, что $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$, поэтому в треугольнике (треугольнике Паскаля)

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & C_2^1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & C_3^1 & & C_3^2 & & 1 & & \\
 & 1 & & C_4^1 & & C_4^2 & & C_4^3 & & 1 & \\
1 & & C_5^1 & & C_5^2 & & C_5^3 & & C_5^4 & & 1 \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & .
\end{array}$$

каждый элемент равен сумме двух над ним:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & .
\end{array}$$

Теперь объясним, почему числа C_n^k называются биномиальными коэффициентами.

Теорема (бином Ньютона).

$$(x+y)^n = x^n + C_n^1\,x^{n-1}y + C_n^2\,x^{n-2}y^2 + \cdots + C_n^{n-2}\,x^2y^{n-2} + C_n^1\,xy^{n-1} + y^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k}.$$

Доказательство.

$$(x+y)^n = \underbrace{(x+y)\times(x+y)\times\cdots\times(x+y)}_{n\text{ раз}}.$$

Мы должны раскрыть скобки и привести подобные. После раскрытия скобок мы получаем 2^n слагаемых. Слагаемые можно перечислить так: из каждого сомножителя (вида $(x+y)$) мы выбираем x или y и перемножаем их. Слагаемое вида $x^k y^{n-k}$ получается при выборе k скобок из n (в отобранных скобках мы берем x, а в остальных — y). Но выбор k скобок из n можно произвести C_n^k способами. □

Следствие. Сумма биномиальных коэффициентов равна 2^n:

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n.$$

Доказательство. Действительно, при $x = y = 1$ в формуле бинома получаем:

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k.$$

$\square$