Лекция 1

Определенный интеграл

Первообразная и неопределенный интеграл.

Определение 1.1. Пусть $f(x)$ — действительная функция, определенная на промежутке $\langle a, b\rangle$. Функция $F(x)$ называется *первообразной* для $f(x)$ на $\langle a, b\rangle$, если $F(x)$ дифференцируема на $\langle a, b\rangle$ и

$$F'(x) = f(x) \quad \text{для всех } x \in \langle a, b\rangle. \tag{1.1}$$

В случае, когда $\langle a, b\rangle$ — отрезок, под $F'(a)$ и $F'(b)$ понимаются односторонние производные.

Примеры. 1. Функция $F(x) = \sin x$ является первообразной для функции $f(x) = \cos x$ на $\mathbb{R}$.

2. Функция $F(x) = \ln x + C$, где C — любое фиксированное число, является первообразной для функции $f(x) = 1/x$ при $x > 0$.

Последний пример показывает, что функция может иметь на промежутке бесконечно много первообразных.

Определение 1.2. Совокупность всех первообразных для данной функции $f(x)$ на промежутке $\langle a, b\rangle$ называется *неопределенным интегралом* от $f(x)$ на $\langle a, b\rangle$ и обозначается

$$\int f(x)\,dx.$$

Теорема 1.3. *Пусть $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — первообразные для функции $f(x)$ на промежутке $\langle a, b\rangle$. Тогда $F_1(x) - F_2(x) \equiv C$ на $\langle a, b\rangle$, где C — некоторая постоянная.*

Иными словами, две первообразных для одной функции отличаются друг от друга на константу.

Доказательство. Функция $h(x) = F_1(x) - F_2(x)$ дифференцируема на $\langle a, b\rangle$, причем

$$h'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) \equiv 0.$$

В силу теоремы 1 из п. 6.3 эта функция постоянна на любом отрезке, лежащем в $\langle a, b\rangle$. Ясно, что $h(x) = \mathrm{const}$ на $\langle a, b\rangle$. □

Ясно, что если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, то при любом C функция $F(x) + C$ также является первообразной. Это простое утверждение вместе с теоремой дает важное

Следствие 1.4. *Пусть $F(x)$ — некоторая первообразная для $f(x)$ на $\langle a, b\rangle$. Тогда*

$$\boxed{\int f(x)\,dx = F(x) + C,} \tag{1.2}$$

где C — произвольное постоянное число.

Формулу (1.2) следует понимать следующим образом: *неопределенный интеграл от функции $f(x)$ на $\langle a, b\rangle$ состоит из всех функций, которые отличаются на $\langle a, b\rangle$ от некоторой фиксированной первообразной $F(x)$ на произвольную постоянную C.*

Таблица неопределенных интегралов. Итак, для вычисления неопределенного интеграла некоторой функции нужно знать любую первообразную этой функции. Выпишем таблицу первообразных для некоторых элементарных функций. Приведенные в таблице формулы легко проверяются дифференцированием. Тем не менее, таблицу необходимо знать на память.

Напомним читателю, что в определении первообразной предполагается, что исходная функция определена на некотором промежутке. Условие на x в каждой строке таблицы определяет допустимые промежутки, на которых справедлива формула для первообразной.

Упражнение. Рассмотрим функцию

$$F_1(x) = \begin{cases} \ln|x| + 1, & x < 0, \\ \ln|x| - 1, & x > 0. \end{cases}$$

Понятно, что $F_1'(x) = 1/x$ при $x \neq 0$. Кроме того, ясно, что не существует такого C, что $F_1(x) = \ln|x| + C$ при $x \neq 0$. Не противоречит ли это строке 3 таблицы?

Теоремы о неопределенных интегралах.

Теорема 1.5 (о линейности неопределенного интеграла). *Если функции $f(x)$, $g(x)$ имеют на $\langle a, b\rangle$ первообразные, то для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ справедливо равенство*

$$\boxed{\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int f(x)\,dx + \beta \int g(x)\,dx.} \tag{1.3}$$

	$f(x)$	$F(x)$	условия
1	x^α	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\alpha \in \mathbb{R},\ \alpha \neq -1,\ x > 0$
2	x^n	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$n \in \mathbb{Z},\ n \neq -1,\ x \in \mathbb{R}$
3	$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$	$x \neq 0$
4	e^x	e^x	$x \in \mathbb{R}$
5	a^x	$\dfrac{a^x}{\ln a}$	$a > 1,\ a \neq 1,\ x \in \mathbb{R}$
6	$\sin x$	$-\cos x$	$x \in \mathbb{R}$
7	$\cos x$	$\sin x$	$x \in \mathbb{R}$
8	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x$	$x \neq k\pi + \dfrac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$
9	$\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x$	$x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
10	$\dfrac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$	$\arcsin \dfrac{x}{a}$	$a > 0,\ x \in (-a, a)$
11	$\dfrac{1}{a^2 + x^2}$	$\dfrac{1}{a} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{a}$	$a > 0,\ x \in \mathbb{R}$
12	$\dfrac{1}{a^2 - x^2}$	$\dfrac{1}{2a} \ln \left\lvert \dfrac{a+x}{a-x} \right\rvert$	$a > 0,\ x \neq \pm a$
13	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2 + b}}$	$\ln\lvert x + \sqrt{x^2 + b}\rvert$	$b \neq 0,\ \begin{array}{ll} x \in \mathbb{R} & \text{при } b > 0, \\ \lvert x\rvert \geqslant \sqrt{\lvert b\rvert} & \text{при } b < 0 \end{array}$

Равенство (1.3) следует понимать так: любая первообразная функции $\alpha f(x) + \beta g(x)$ является линейной комбинацией вида $\alpha F(x) + \beta G(x)$, где $F(x)$ и $G(x)$ — первообразные для $f(x)$ и $g(x)$ соответственно; и наоборот, любая функция вида $\alpha F(x) + \beta G(x)$ является первообразной для функции $\alpha f(x) + \beta g(x)$.

Доказательство получается немедленно из свойства линейности дифференцирования: если $F'(x) = f(x)$ и $G'(x) = g(x)$, то

$$(\alpha F(x) + \beta G(x))' = \alpha f(x) + \beta g(x). \quad \square$$

Пример. $\displaystyle\int (3\cos x + 2^x)\, dx = 3\sin x + \frac{2^x}{\ln 2} + C.$

Теорема 1.6 (правило интегрирования по частям). *Пусть на некотором промежутке $\langle a, b\rangle$ функции $u(x)$, $v(x)$ дифференцируемы и функция $v(x)u'(x)$ имеет первообразную. Тогда на этом промежутке $u(x)v'(x)$ также имеет первообразную и справедлива формула*

$$\boxed{\int u(x)v'(x)\, dx = uv - \int v(x)u'(x)\, dx.} \tag{1.4}$$

Формула (1.4) называется *формулой интегрирования по частям*.

Доказательство. Согласно формуле (1) из п. 5.5 для производной произведения двух функций имеем

$$u(x)v'(x) = (u(x)v(x))' - v(x)u'(x)$$

для всех $x \in \langle a, b\rangle$. Первообразная функции $(uv)'$ равна uv, функция vu' имеет первообразную по условию теоремы. По теореме 1.5 функция uv' также имеет первообразную и справедлива формула (1.4). $\square$

Формулу (1.4) коротко записывают в виде

$$\boxed{\int u\, dv = uv - \int v\, du.} \tag{1.4'}$$

Эта формула применяется в случаях, когда интеграл в правой части вычисляется проще, чем в левой.

Примеры.

1. $$\int x\cos x\,dx = \left\{\begin{matrix} x=u,\ \cos x\,dx = dv \\ du = dx,\ v=\sin x \end{matrix}\right\} = x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x + C \qquad (x\in\mathbb{R}).$$

2. $$\int \ln x\,dx = \left\{\begin{matrix} \ln x = u,\ dx = dv \\ du = \frac{1}{x}\,dx,\ v = x \end{matrix}\right\} = \ln x - \int \frac{1}{x}\cdot x\,dx = x\ln x - x + C \qquad (x>0).$$

Аналогично вычисляется интеграл вида $\int P(x)\ln x\,dx$, где $P(x)$ — произвольный многочлен.

Упражнение 1. Найдите $\int x^2\ln x\,dx$.

Иногда удобно последовательное применение интегрирования по частям несколько раз. Этим приемом вычисляются интегралы вида $\int P(x)\cos ax\,dx$, $\int P(x)\sin ax\,dx$, $\int P(x)e^{ax}\,dx$,

Пример 3.

$$\int x^2e^x\,dx = \left\{\begin{matrix} x^2=u,\ e^x dx = dv \\ du = 2x\,dx,\ v = e^x \end{matrix}\right\} = x^2e^x - 2\int xe^x\,dx = \left\{\begin{matrix} x=u,\ e^x dx = dv \\ du = dx,\ v=e^x \end{matrix}\right\}$$
$$= x^2e^x - 2\left(xe^x - \int e^x\,dx\right) = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x = (x^2-2x+2)e^x \qquad (x\in\mathbb{R}).$$

Упражнение 2. Найдите $\int x^2\cos x\,dx$.

Теорема 1.7 (о замене переменной в неопределенном интеграле). *Пусть $y=\varphi(x)$ — дифференцируемая на $[a,b]$ функция, а функция $f(y)$ имеет первообразную $F(y)$ на отрезке $[m,M]$, где $m=\min\limits_{x\in[a,b]}\varphi(x)$, $M=\max\limits_{x\in[a,b]}\varphi(x)$. Тогда при $x\in[a,b]$*

$$\boxed{\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = F(\varphi(x)) + C.} \tag{1.5}$$

Доказательство. По теореме о производной сложной функции имеем

$$(F(\varphi(x)))' = f(\varphi(x))\varphi'(x).$$

Отсюда сразу вытекает формула (1.5). □

Способ вычисления интеграла, основанный на формуле (1.5), называют *подведением* (*части подынтегрального выражения*) *под знак дифференциала*, поскольку левая часть формулы (1.5) имеет вид $\int f(\varphi(x))\,d\varphi(x)$.

Формулу (1.5) иногда записывают следующим образом:

$$\boxed{\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \int f(y)\,dy.} \tag{1.5'}$$

Имеется в виду, что справа после вычисления неопределенного интеграла вместо y следует подставить $\varphi(x)$.

Если $y=\varphi(x)$ имеет обратную функцию $x=\varphi^{-1}(y)$, определенную на отрезке $[m,M]$, то формулу (1.5′) можно понимать в следующем смысле: при $y\in[m,M]$

$$\boxed{\int f(y)\,dy = \int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx,} \tag{1.6}$$

где справа вместо x следует подставить $x=\varphi^{-1}(y)$. Вычисление интеграла при помощи формулы (1.6) называется вычислением *методом подстановки*, а функция $y=\varphi(x)$ называется *подстановкой*.

Примеры. 4. Проиллюстрируем метод подведения под знак дифференциала:

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = \int \frac{-d\cos x}{\cos x} = \left\{\begin{matrix} y=\cos x \\ x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) \end{matrix}\right\} = -\int \frac{dy}{y} = -\ln|y| + C = -\ln|\cos x| + C.$$

5. При вычислении интеграла методом подведения под знак дифференциала не обязательно обозначать какой-либо буквой новую функцию:

$$\int xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}\int e^{x^2}d(x^2) = \frac{1}{2}e^{x^2} + C.$$

6. Интеграл $\int \arcsin x\,dx$ вычисляется интегрированием по частям с последующим подведением под знак дифференциала:

$$\int \arcsin x\,dx = x\arcsin x - \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = x\arcsin x + \frac{1}{2}\int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$= \left\{\begin{matrix} y = 1-x^2 \\ x\in(-1,1) \end{matrix}\right\} = x\arcsin x + \frac{1}{2}\int y^{-1/2}dy = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

7. Этот пример иллюстрирует применение простейшей подстановки:

$$\int \cos 2x\,dx = \left\{\begin{matrix} x = \frac{1}{2}t,\ t = 2x \\ dx = \frac{1}{2}dt \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\int \cos t\,dt = \frac{1}{2}\sin t + C = \frac{1}{2}\cos 2x + C \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Заметим, что приведенный интеграл можно было вычислить и подведением под знак дифференциала.

8. Интеграл $\int \sqrt{1-x^2}dx$ вычисляется при помощи подстановки $x = \sin t$:

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \left\{\begin{matrix} x = \sin t,\ dx = \cos t\,dt,\ t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ t = \arcsin x,\ x \in [-1,1] \end{matrix}\right\} = \int \cos^2 t\,dt + C = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2t)\,dt$$
$$= \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t + C = \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}\sin(2\arcsin x) + C = \frac{1}{2}\arcsin x + x\sqrt{1-x^2} + C.$$

Упражнение. Найдите интеграл $\int \operatorname{actg} x\,dx$.

Лекция 2

Интегрирование простейших рациональных дробей.

Определение 2.1. *Простейшими дробями* называются рациональные функции следующих типов:

I) $\dfrac{A}{x-a}$;

II) $\dfrac{A}{(x-a)^k}$, где $k > 1$;

III) $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$, где $D = p^2 - 4q < 0$ (т. е. знаменатель не имеет действительных корней);

IV) $\dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}$, где $D = p^2 - 4q < 0,\ k > 1$.

Простейшие дроби типа I и II интегрируются следующим образом:

I) $\displaystyle\int \frac{A}{x-a}\,dx = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = A\ln|x-a| + C$.

II) $\displaystyle\int \frac{A}{(x-a)^k}\,dx = -\frac{A}{(k-1)(x-a)^{k-1}} + C$.

Интегрирование простейшей дроби типа III несколько упрощает *линейная подстановка* $x = t - \frac{1}{2}p$, при помощи которой выделяется полный квадрат в знаменателе:

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx = \int \frac{Mt - \frac{1}{2}pM + N}{t^2 + q - \frac{1}{4}p^2}\,dx = \left\{\begin{matrix} N - \frac{1}{2}pM = N_1 \\ q - \frac{1}{4}p^2 = \beta^2 > 0 \end{matrix}\right\}$$
$$= \int \frac{Mt + N_1}{t^2+\beta^2}\,dt = \frac{M}{2}\int \frac{d(t^2+\beta^2)}{t^2+\beta^2} + N_1\int \frac{dt}{t^2+\beta^2}$$
$$= \frac{M}{2}\ln(t^2+\beta^2) + \frac{N_1}{\beta}\operatorname{arctg}\frac{t}{\beta} + C = \frac{M}{2}\ln((x+\tfrac{1}{2}p)^2+\beta^2) + \frac{N_1}{\beta}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{1}{2}p}{\beta} + C.$$

Здесь можно вернуться к обозначениям M, N, p, q. Но мы не будем это делать, поскольку не ставим перед собой задачу вывести формулу для последующего запоминания (она слишком громоздка).

Несколько сложнее обстоит дело с простейшей дробью типа IV. При помощи подстановки $x = t - \frac{1}{2}p$, действуя как в случае простейшей дроби типа III, получаем

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k} = \int \frac{Mt+N_1}{(t^2+\beta^2)^k}\,dt = \frac{M}{2}\int \frac{d(t^2+\beta^2)}{(t^2+\beta^2)^k} + N_1\int \frac{dt}{(t^2+\beta^2)^k}$$
$$= -\frac{M}{2(k-1)(t^2+\beta^2)^{k-1}} + N_1\int \frac{dt}{(t^2+\beta^2)^k}.$$

Далее, можно показать, что для интеграла

$$J_k = \int \frac{dt}{(t^2+\beta^2)^k}$$

справедливо рекуррентное соотношение

$$J_k = \frac{1}{2(k-1)\beta^2}\left((2k-3)J_{k-1} + \frac{t}{(t^2+\beta^2)^{k-1}}\right), \qquad k \geqslant 2. \tag{2.1}$$

Оно позволяет в итоге свести вычисление J_k к вычислению интеграла

$$J_1 = \frac{1}{\beta} \operatorname{arctg} \frac{t}{\beta} + C.$$

Интегрирование рациональных функций. Напомним, что рациональная функция, или, как ее еще называют, *рациональная дробь*

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{c_0 x^n + c_1 x^{n-1} + \cdots + c_n}{d_0 x^m + d_1 x^{m-1} + \cdots + d_m} \tag{2.2}$$

определена (и непрерывна) всюду, где не обращается в 0 знаменатель $Q(x)$ (см. п. 2.3 ВвА). Поэтому мы будем рассматривать интегралы $\int R(x)\,dx$ на промежутках, не содержащих корней многочлена $Q(x)$.

Определение 2.2. Рациональная дробь (2.2) называется *правильной*, если $\deg P_n < \deg Q_m$, т.е. $n < m$. В противном случае дробь (2.2) называется *неправильной*.

Если дробь $R(x)$ является неправильной, то ее можно представить (и при том единственным способом) в виде

$$R(x) = T(x) + R_1(x), \tag{2.3}$$

где $T(x)$ — многочлен (порядка $n-m$), а $R_1(x)$ — правильная рациональная дробь. Многочлен $T(x)$ называется целой частью неправильной дроби, а получить его можно, например, разделив $P(x)$ на $Q(x)$ углом.

Формула (2.3), показывает, что интегрирование произвольной рациональной функции сводится к интегрированию многочлена и правильной рациональной дроби. Поэтому далее будем считать дробь $R(x)$ правильной.

Далее мы будем опираться на следующие результаты из алгебры.[1)]

Теорема 2.3 (о разложении многочлена на неприводимые сомножители). *Любой многочлен $Q(x)$ можно разложить на неприводимые сомножители, т.е. представить в виде*

$$Q(x) = a(x-x_1)^{k_1} \cdots (x-x_r)^{k_r} (x^2 + p_1 x + q_1)^{l_1} \cdots (x^2 + p_s x + q_s)^{l_s}, \tag{2.4}$$

где все скобки предполагаются различными, а квадратные трехчлены не имеют действительных корней.

Теорема 2.4 (о разложении рациональной дроби в сумму простейших). *Пусть $R(x) = P(x)/Q(x)$ — правильная рациональная дробь со знаменателем* (2.4). *Тогда существуют такие коэффициенты A_{ij}, $i = 1, \ldots, r$, $j = 1, \ldots, k_i$, и M_{ij}, N_{ij}, $i = 1, \ldots, s$, $j = 1, \ldots, k_i$, что справедливо тождество*

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} = &\frac{A_{11}}{x-x_1} + \frac{A_{12}}{(x-x_1)^2} + \cdots + \frac{A_{1k_1}}{(x-x_1)^{k_1}} \\ &+ \cdots \\ &+ \frac{A_{r1}}{x-x_r} + \frac{A_{r2}}{(x-x_r)^2} + \cdots + \frac{A_{rk_r}}{(x-x_r)^{k_r}} \\ &+ \frac{M_{11}x + N_{11}}{x^2 + p_1 x + q_1} + \frac{M_{12}x + N_{12}}{(x^2 + p_1 x + q_1)^2} + \cdots + \frac{M_{1l_1}x + N_{1l_1}}{(x^2 + p_1 x + q_1)^{l_1}} \\ &+ \cdots \\ &+ \frac{M_{s1}x + N_{s1}}{x^2 + p_s x + q_s} + \frac{M_{s2}x + N_{s2}}{(x^2 + p_s x + q_s)^2} + \cdots + \frac{M_{sl_s}x + N_{sl_s}}{(x^2 + p_s x + q_s)^{l_s}}; \end{aligned} \tag{2.5}$$

при этом коэффициенты A_{ij}, M_{ij} и N_{ij} определяются однозначно.

Поясним, что каждому сомножителю вида $(x-x_i)^{k_i}$ в (2.4) отвечает k_i слагаемых $A_{ij}(x-x_i)^{-j}$, $j = 1, \ldots, k_i$, в сумме (2.5). Аналогично каждому сомножителю вида $(x^2 + p_i x + q_i)^{l_i}$ в (2.4) отвечает l_i слагаемых $(M_{ij}x + N_{ij})(x^2 + p_i x + q_i)^{-j}$, $j = 1, \ldots, l_i$, в сумме (2.5). Как нетрудно подсчитать, общее количество коэффициентов A_{ij}, M_{ij}, N_{ij} в (2.5) равно степени m многочлена $Q(x)$.

Каждое из слагаемых в (2.5) является простейшей рациональной дробью одного из четырех типов I–IV; такие рациональные дроби мы научились интегрировать в предыдущем пункте.

Для определения неизвестных коэффициентов в разложении (2.5) обычно поступают следующим образом. Левую и правую части тождества (2.5), содержащего неизвестные коэффициенты, умножают на $Q(x)$. Получается равенство двух многочленов. Из него получают уравнения на искомые коэффициенты, используя, что 1) совпадают коэффициенты при одинаковых степенях x, 2) равенство справедливо при любых значениях x. Из условия 1) можно получить m уравнений (по числу неизвестных коэффициентов), из которых эти коэффициенты можно найти. Из условия 2) можно получить произвольно много уравнений; любые m из них также позволяют найти неизвестные коэффициенты. При отыскании коэффициентов достаточно пользоваться одним из этих условий, но обычно удобно их комбинировать.

Пример 1. Найдем интеграл $J = \displaystyle\int \frac{dx}{x^3+1}$.

[1)] Обычно эти результаты обсуждаются в курсе линейной алгебры во втором семестре.

Подынтегральная функция является правильной рациональной дробью. Разложение на неприводимые сомножители знаменателя имеет вид $(x+1)(x^2-x+1)$. Это означает, что разложение подынтегральной функции в сумму простейших дробей следует искать в виде

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{Mx+N}{x^2-x+1}.$$

Умножив обе части тождества на x^3+1, получим тождество

$$1 = A(x^2-x+1) + (Mx+N)(x+1).$$

Если положить здесь $x=-1$, то получится соотношение $1=3A$. Если приравнять коэффициенты при x^2 и свободные члены, то получатся соотношения $0=A+M$ и $1=A+N$. Из системы уравнений

$$\begin{cases} 3A=1, \\ A+M=0, \\ A+N=1 \end{cases}$$

легко определяются коэффициенты: $A=\frac{1}{3}$, $M=-\frac{1}{3}$, $N=\frac{2}{3}$. Таким образом,

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{3}\int\frac{dx}{x+1} + \frac{1}{3}\int\frac{-x+2}{x^2-x+1}\,dx = \frac{1}{3}\ln|x+1| + \frac{1}{3}\int\frac{-\frac{1}{2}d(x^2-x+1)}{x^2-x+1} + \frac{1}{2}\int\frac{d(x-\frac{1}{2})}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} \\ &= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C. \quad \square \end{aligned}$$

В заключение сделаем следующие замечания.

Замечание 1. Из теорем 1 и 2 и рассуждений, приведенных в п. 3.4 следует, что *первообразная любой рациональной функции $R(x)$ на каждом промежутке непрерывности $R(x)$ является элементарной функцией.* Говорят: интеграл берется в элементарных функциях.

Замечание 2. Обратим внимание читателя, что теоремы 1 и 2 по-существу использованы в этом пункте только в замечании 1. В самом деле, решение приведенного выше примера является математически корректным без каких-либо ссылок на эти теоремы. Более того, математически безупречным является следующий ход вычисления любого неопределенного интеграла: предъявляется ответ и производится его проверка дифференцированием. При этом весь параграф §3 за исключением принципиальной теоремы из п. 3.1 можно рассматривать как набор рекомендаций, позволяющих «угадать» верный ответ.

Интегрирование тригонометрических функций. Рассмотрим интеграл вида

$$\int R(\cos x, \sin x)\,dx. \tag{2.6}$$

Здесь $R(u,v)$ — рациональная функция двух переменных:

$$R(u,v) = \frac{P(u,v)}{Q(u,v)},$$

где $P(u,v)$ и $Q(u,v)$ — многочлены от переменных u и v.[2)]

Этот интеграл сводится к интегралу от рациональной функции при помощи так называемой *универсальной тригонометрической подстановки*

$$x = 2\operatorname{arctg} t.$$

В этом случае при $x\in(-\pi,\pi)$

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}.$$

Поэтому на любом промежутке из $(-\pi,\pi)$, на котором непрерывна подынтегральная функция имеем

$$\int R(\cos x, \sin x)\,dx = \int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2\,dt}{1+t^2} = \int R_1(t)\,dt,$$

где $R_1(t)$ — рациональная функция от t. Последний интеграл вычисляется методами, описанными в пп. 3.4, 3.5. Таким образом, интеграл вида (2.6) берется в элементарных функциях.

Пример 1. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin x} = \int\frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$

[2)] Поясним, что многочленом $T(u,v)$ степени k от двух переменных u и v называется выражение вида $\sum\limits_{i+j\leqslant k} a_{ij}u^iv^j$.

Отметим, что универсальная тригонометрическая подстановка часто приводит к довольно громоздким выкладкам. В этих случаях можно попытаться вычислить интеграл другими способами. Например, попытаться осуществить подстановки $t = \cos x$, $t = \sin x$, $t = \operatorname{tg} x$.

Пример 2.

$$\int \frac{dx}{\cos^4 x} = \int (1 + \operatorname{tg}^2 x) \frac{dx}{\cos^2 x} = \int (1 + \operatorname{tg}^2 x)\, d(\operatorname{tg} x) = \operatorname{tg} x + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + C.$$

Интегрирование некоторых алгебраических функций.

Интегралы вида $\displaystyle\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}\right) dx$. Здесь $n \in \mathbb{N}$, R — рациональная функция двух переменных. Подстановка

$$t = \sqrt[n]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}$$

сводит этот интеграл к интегралу от рациональной функции. Действительно,

$$x = \frac{-\delta t^n + \beta}{\gamma t^n - \alpha} = R_1(t);$$

поэтому

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}\right) dx = \int R(R_1(t), t) R_1'(t)\, dt.$$

Пример.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} = \left\{ \begin{matrix} \sqrt[6]{x} = t,\ x = t^6 \\ dx = 6t^5 dt \end{matrix} \right\} = 6 \int \frac{t^5\, dt}{t^3 + t^2} = 6 \int \left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1} \right)$$
$$= 2t^3 - 3t^2 + 6t - 6 \ln|t+1| + C = 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6 \ln|\sqrt[6]{x} + 1| + C.$$

Интегралы вида $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})\, dx$. Здесь, как и выше, R — рациональная функция от двух переменных. Предполагается, что $a \neq 0$ (случай $a = 0$ фактически рассмотрен выше).

Такие интегралы сводятся к интегралам от рациональной функции при помощи так называемых *подстановок Эйлера*:

1) если квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ имеет корни x_1 и x_2, то «работает» подстановка $t = \sqrt{a \dfrac{x - x_1}{x - x_2}}$;

2) если $a > 0$, то к «рационализации» интеграла приводит подстановка $t = \sqrt{ax^2 + bx + c} \pm \sqrt{a}\, x$ (можно выбирать любой знак);

Пример. Вычислим при помощи подстановки Эйлера табличный интеграл $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + c}}$.

Положим $t = \sqrt{x^2 + c} + x$. Тогда

$$dt = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + c}} + 1 \right) dx = \frac{\sqrt{x^2 + c} + x}{\sqrt{x^2 + c}}\, dx = \frac{t}{\sqrt{x^2 + c}}\, dx$$

и

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + c}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\sqrt{x^2 + c} + x| + C.$$

Зачастую подстановки Эйлера приводят к громоздким выкладкам. Поэтому полезно иметь в виду следующие более простые приемы при вычислении некоторых интегралов вида $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})\, dx$.

1) Рассмотрим интегралы вида

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}. \tag{3.1}$$

Выделим полный квадрат в выражении под знаком корня линейной подстановкой $t = x + \frac{b}{2a}$:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{at^2 + c_1}, \quad \text{где } c_1 = c - \frac{b^2}{4a}.$$

При $c_1 = 0$ подынтегральное выражение фактически является рациональной функцией. Далее,

$$\sqrt{at^2 + c_1} = \begin{cases} \sqrt{a}\sqrt{t^2 + \gamma}, & \text{если } a > 0, \\ \sqrt{|a|}\sqrt{\beta^2 - t^2}, & \text{если } a < 0, \end{cases}$$

где $\gamma = c_1/a$, $\beta^2 = -c_1/a$. Поэтому мы приходим к одному из двух табличных интегралов:

$$\text{а)}\quad J_1 = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+\gamma}} = \ln\left|\sqrt{t^2+\gamma}+t\right| + C \quad (\gamma \neq 0),$$

$$\text{б)}\quad J_2 = \int \frac{dt}{\sqrt{\beta^2-t^2}} = \arcsin\frac{t}{\beta} + C.$$

2) Интегралы вида

$$\int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx \tag{3.2}$$

сводятся к интегралам типа (1) следующим образом:

$$\int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = \int \frac{M_1(2ax+b)+N_1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = 2M_1\sqrt{ax^2+bx+c} + N_1\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

3) Интегралы вида

$$J = \int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx \tag{3.3}$$

сводятся к интегралам типа (1) при помощи интегрирования по частям:

$$J = \left\{ \begin{matrix} u = \sqrt{ax^2+bx+c},\ v = x+\frac{b}{2a} \\ du = \frac{2ax}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx,\ dv = dx \end{matrix} \right\} = \left(x+\frac{b}{2a}\right)\sqrt{ax^2+bx+c} - \int \left(x+\frac{b}{2a}\right)\frac{2ax}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$$

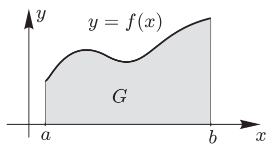
$$= \left(x+\frac{b}{2a}-2\right)\sqrt{ax^2+bx+c} - \int \frac{Nx+M}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx.$$

Лекция 3

Определенный интеграл

Определение 3.1. *Криволинейной трапецией* называется множество вида

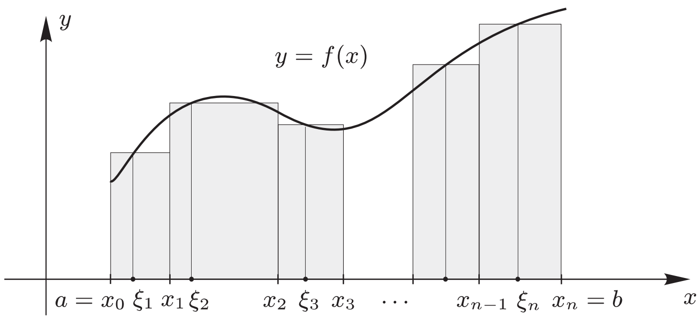
$$G = \begin{cases} a \leqslant x \leqslant b, \\ 0 \leqslant y \leqslant f(x). \end{cases}$$



Разобьем $[a,b]$ на «мелкие» отрезки точками $x_1,\ldots,x_n$ и возьмем на каждом из отрезков произвольную точку ξ_k. На отрезке $[x_{k-1},x_k]$ заменим криволинейную трапецию прямоугольником с основанием Δx_k и высотой $f(\xi_k)$. Сумма площадей таких прямоугольников будет равна

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k.$$

Эта величина приблизительно равна площади криволинейной трапеции G.



Интуиция подсказывает, что если устремить к нулю величину $\max\limits_{k} \Delta x_k$ (при этом количество отрезков стремится к бесконечности), то мы получим точный ответ.

Определение определенного интеграла.

Определение 3.2. Рассмотрим отрезок $[a,b]$. *Разбиением* отрезка $[a,b]$ называется любой набор точек на $[a,b]$, такой, что $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$. Обозначим разбиение буквой T.

Параметром разбиения T будем называть число $\lambda(T) = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} \Delta x_k$.

Набором фиксированных точек, отвечающих разбиению T, называют любой набор точек $\xi_1,\ldots,\xi_n$, такой, что $\xi_k \in [x_{k-1},x_k]$. Такой набор обозначается Ξ.

Пусть функция $f(x)$ определена на $[a,b]$. Тогда интегральной суммой, отвечающей разбиению T и набору фиксированных точек Ξ, для $f(x)$ на $[a,b]$ называется величина

$$S(f,T,\Xi)=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k, \quad \text{где } \Delta x_k = x_k - x_{k-1}.$$

Функция $f(x)$ называется *интегрируемой на* $[a,b]$, если существует предел

$$I=\lim_{\lambda(T)\to 0} S(f,T,\Xi),$$

который понимается в следующем смысле: для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$, такое, что для любого разбиения T с $\lambda(T)<\delta$ и всех наборов Ξ, отвечающих таким T, выполняется неравенство $|I-S(f,T,\Xi)|<\varepsilon$. При этом число I называют определенным интегралом функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ и обозначают так:

$$I=\int_a^b f(x)\,dx$$

Отметим, что предел $\lim\limits_{\lambda(T)\to 0} S(f,T,\Xi)$ единственен (это несложно проверить, взяв за образец доказательство единственности предела функции).

Договоримся далее для краткости не указывать функцию f среди аргументов S: $S(f,T,\Xi)=S(T,\Xi)$.

Теорема 3.3 (необходимое условие интегрируемости). *Интегрируемая на отрезке $[a,b]$ функция ограничена на нем.*

Доказательство. По определению интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ для $\varepsilon=1$ (например) существует такое разбиение T, что $|S(T,\Xi)-I|<1$ для любого набора фиксированных точек Ξ. Иначе говоря, $I-1<\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k<I+1$. Покажем, что $f(x)$ ограничена на $[x_0,x_1]$. Действительно,

$$\underbrace{I-1-\sum_{k=2}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k}_{B} < f(\xi_1)\Delta x_1 < \underbrace{I+1-\sum_{k=2}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k}_{A}$$

или

$$\frac{B}{\Delta x_1}<f(\xi_1)<\frac{A}{\Delta x_1}.$$

Итак, при любом $\xi_1\in[x_0,x_1]$ ($\xi_2,\xi_3,\ldots,\xi_n$ остаются фиксированными) имеем $C_1\leqslant f(\xi_1)\leqslant C_2$. Аналогично показывается, что $C_1^{(k)}\leqslant f(x)\leqslant C_2^{(k)}$, если $x\in[x_{k-1},x_k]$. Тогда $\min\limits_k C_1^{(k)}\leqslant f(x)\leqslant \max\limits_k C_2^{(k)}$.

Пример 3.4. $f(x)=\begin{cases}1/x, & x\in(0,1],\\ 0, & x=0,\end{cases}$ не интегрируема на $[0,1]$ (так как не является ограниченной).

Пример 3.5. $f(x)=C$ на $[a,b]$. Возьмем разбиение $T=\{x_0=a<x_1<\ldots<x_{n-1}<x_n=b\}$. Выпишем интегральную сумму, отвечающую этому разбиению:

$$S(T,\Xi)=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k=\sum_{k=1}^{n} C\Delta x_k = C\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k = C(b-a).$$

В данном случае $S(T,\Xi)$ не зависит ни от набора точек Ξ, ни даже от самого разбиения T. Поэтому

$$\lim_{\lambda(T)\to 0} S(T,\Xi)=\lim_{\lambda(T)\to 0} C(b-a)=C(b-a)$$

и, значит,

$$\int_a^b C\,dx = C(b-a).$$

Пример 3.6. Рассмотрим функцию Дирихле $y=D(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q},\\ 0, & x\notin\mathbb{Q}.\end{cases}$ Покажем, что эта функция не интегрируема на $[0,1]$. Пусть T — разбиение и набор $\Xi_1=\{\xi_{11},\ldots,\xi_{1n}\}$ состоит из рациональных точек, а набор $\Xi_2=\{\xi_{21},\ldots,\xi_{2n}\}$ — из иррациональных точек. Тогда

$$S(T,\Xi_1)=\sum_{k=1}^{n} D(\xi_{1k})\Delta x_k=\sum_{k=1}^{n} 1\cdot\Delta x_k = b-a,$$

а

$$S(T,\Xi_2)=\sum_{k=1}^{n} D(\xi_{2k})\Delta x_k=\sum_{k=1}^{n} 0\cdot\Delta x_k = 0.$$

Допустим, что $D(x)$ интегрируема на $[0,1]$ и I — интеграл. Положим $\varepsilon = 1/3$. Тогда существует $\delta > 0$, такое, что для любого разбиения T с $\lambda(T) < \delta$ (и любого набора Ξ) имеем $|S(T,\Xi) - I| < \varepsilon$. При $\Xi = \Xi_1$ получаем $|I - 1| < \varepsilon$, а при $\Xi = \Xi_2$ получаем $|I| < \varepsilon$. Эти два неравенства при $\varepsilon = 1/3$ противоречат друг другу (почему?).

Геометрическая интерпретация определенного интеграла.

Определение 3.7. Криволинейную трапецию $G = \begin{cases} a \leqslant x \leqslant b, \\ 0 \leqslant y \leqslant f(x), \end{cases}$ мы будем называть *квадрируемой* (имеющей площадь), если существует интеграл

$$S_G = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Число S_G называется *площадью* криволинейной трапеции. Если этот интеграл не существует, то криволинейная трапеция по определению не имеет площади.

В частности, фигура $G = \begin{cases} a \leqslant x \leqslant b, \\ 0 \leqslant y \leqslant D(x) \end{cases}$ (G — множество вертикальных отрезков длины 1, выходящих из рациональных точек оси Ox) не имеет площади.

Лекция 4

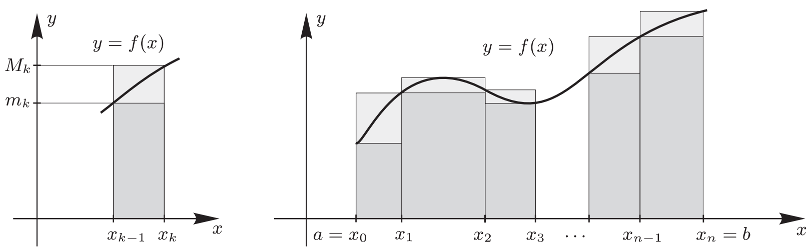
Суммы Дарбу. Критерий интегрируемости.

Определение 4.1. Введем следующие обозначения:

$$M_k = \sup_{\xi \in [x_{k-1}, x_k]} f(\xi), \qquad m_k = \inf_{\xi \in [x_{k-1}, x_k]} f(\xi),$$

$\overline{S}(T) = \sum\limits_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k$ — *верхняя сумма Дарбу,* отвечающая разбиению T,

$\underline{S}(T) = \sum\limits_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k$ — *нижняя сумма Дарбу*, отвечающая разбиению T.



Графическая интерпретация сумм Дарбу понятна из рисунка. Сумма площадей интенсивно окрашенных прямоугольников — это нижняя сумма Дарбу $\underline{S}(T)$. Сумма площадей менее интенсивно окрашенных прямоугольников (они частично закрыты интенсивно окрашенными!) — это верхняя сумма Дарбу $\overline{S}(T)$.

Свойства сумм Дарбу.

Теорема 4.2 (свойство 1). *Для любого набора фиксированных точек Ξ справедливо неравенство*

$$\underline{S}(T) \leqslant S(T,\Xi) \leqslant \overline{S}(T),$$

причем

$$\underline{S}(T) = \inf_{\Xi} S(T;\Xi), \qquad \overline{S}(T) = \sup_{\Xi} S(T;\Xi).$$

Доказательство. По определению величин m_k и M_k имеем $m_k \leqslant f(\xi_k) \leqslant M_k$. Поэтому

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k}_{\underline{S}(T)} \leqslant \underbrace{\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \Delta x_k}_{S(T;\Xi)} \leqslant \underbrace{\sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k}_{\overline{S}(T)}\,.$$

Покажем, что $\sup\limits_{\Xi} S(T,\Xi) = \overline{S}(T)$. Положим $\varepsilon_1 = \varepsilon/(b-a)$ и для ε_1 найдем на каждом из отрезков $[x_{k-1}, x_k]$ точку ξ_k, такую, что $|f(\xi_k) - M_k| < \varepsilon_1$ $(k = 1, \ldots, n)$. Это возможно, поскольку $M_k = \sup\limits_{\xi\in[x_{k-1},x_k]} f(\xi)$. Тогда

$$|S(T,\Xi) - \overline{S}(T)| = \left|\sum_{k=1}^{n}(f(\xi_k) - M_k)\Delta x_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n}\underbrace{|f(\xi_k) - M_k|}_{<\varepsilon_1}\Delta x_k$$

$$< \sum_{k=1}^{n}\varepsilon_1\Delta x_k = \varepsilon_1\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k = \varepsilon_1(b-a) = \varepsilon. \quad \square$$

Аналогичным образом доказывается, что $\inf\limits_{\Xi} S(T,\Xi) = \underline{S}(T)$

Теорема 4.3 (свойство 2). *Для любых двух разбиений T_1 и T_2 справедливо неравенство $\underline{S}(T_1) \leqslant \overline{S}(T_2)$*

Доказательство. Пусть для определенности $f(x) \geqslant 0$ на $[a;b]$. Рассмотрим криволинейную трапецию

$$G = \begin{cases} a \leqslant x \leqslant b, \\ 0 \leqslant y \leqslant f(x). \end{cases}$$

Нижняя сумма Дарбу $\underline{S}(T_1) = \sum\limits_{k=1}^{n} m_k\Delta x_k$ представляет собой площадь S_1 некоторой фигуры $\Omega_1 \subseteq G$ (см. рисунок выше; эта фигура состоит из интенсивно закрашенных прямоугольников). Верхняя сумма Дарбу $\overline{S}(T_2) = \sum\limits_{k=1}^{n} M_k\Delta x_k$ равна площади S_2 некоторой фигуры $\Omega_2 \supseteq G$ (эта фигура также состоит из прямоугольников). Итак, $\Omega_1 \subseteq G \subseteq \Omega_2$; поэтому $\Omega_1 \subseteq \Omega_2$, и, значит, $\underline{S}(T_1) = S_1 \leqslant S_2 = \overline{S}(T_2)$. $\square$

Обратите внимание: здесь T_1 и T_2 — разные (вообще говоря) разбиения.

Предложение 4.4. *Существуют числа*

$$\underline{I} = \sup_T \underline{S}(T) \quad и \quad \overline{I} = \inf_T \overline{S}(T)$$

(где $\sup$ *и* $\inf$ *берутся по всем разбиениям T отрезка $[a,b]$), причем $\underline{I} \leqslant \overline{I}$.*

Числа $\underline{I}$ и $\overline{I}$ называются *нижним* и *верхним* интегралами Дарбу.

Доказательство. Из теоремы 2 имеем: для любых разбиений T и T_2 справедливо неравенство $\underline{S}(T) \leqslant \overline{S}(T_2)$. Зафиксируем T_2. Тогда для всех разбиений T имеем

$$\underline{S}(T) \leqslant \overline{S}(T_2);$$

т. е. множество чисел $\underline{S}(T)$ ограничено сверху величиной $\overline{S}(T_2)$; это означает, что существует $\underline{I} = \sup \underline{S}(T)$, причем $\underline{I} \leqslant \overline{S}(T_2)$ (для любого разбиения T_2).

Далее, $\overline{S}(T_2)$ ограничена снизу величиной $\underline{I}$; поэтому существует $\overline{I} = \inf \overline{S}(T_2)$, причем $\overline{I} \geqslant \underline{I}$. $\square$

Лекция 5

Теорема 5.1 (критерий интегрируемости). *Ограниченная на отрезке $[a;b]$ функция интегрируема на нем тогда, и только тогда, когда*

$$\lim_{\lambda(T)\to 0} \overline{S}(T) - \underline{S}(T) = 0, \tag{5.1}$$

т. е. если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое, что для всех разбиений T с $\lambda(T) < \delta$ справедливо неравенство $|\overline{S}(T) - \underline{S}(T)| < \varepsilon$.

Доказательство. *Необходимость* ($\implies$). Пусть функция интегрируема, т. е. существует предел $\lim\limits_{\lambda(T)\to 0} S(T,\Xi) = I$. По определению, для $\varepsilon_1 = \varepsilon/3$ существует $\delta > 0$, такое, что $|S(T;\Xi) - I| < \varepsilon_1$ для всех разбиений T с $\lambda(T) < \delta$. Таким образом, для любого набора фиксированных точек Ξ, подчиненного такому разбиению, имеем

$$I - \frac{\varepsilon}{3} < S(T,\Xi) < I + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Это означает, что

$$\underline{S}(T) = \inf_{\Xi} S(T,\Xi) \geqslant I - \frac{\varepsilon}{3}, \qquad \overline{S}(T) = \sup_{\Xi} S(T,\Xi) \leqslant I + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Итак,

$$I - \frac{\varepsilon}{3} \leqslant \underline{S}(T) \leqslant \overline{S}(T) \leqslant I + \frac{\varepsilon}{3};$$

поэтому $\overline{S}(T) - \underline{S}(T) \leqslant 2\varepsilon/3 < \varepsilon$ для всех T с $\lambda(T) < \delta$.

Достаточность ($\Longleftarrow$). Пусть $\lim\limits_{\lambda(T)\to 0} \overline{S}(T) - \underline{S}(T) = 0$. Из предложения 4.6 имеем

$$\underline{S}(T) \leqslant \underline{I} \leqslant \overline{I} \leqslant \overline{S}(T), \tag{5.2}$$

откуда видно, что $\overline{I} - \underline{I} \leqslant \overline{S}(T) - \underline{S}(T)$. А поскольку для любого $\varepsilon > 0$ существует разбиение T, для которого $\overline{S}(T) - \underline{S}(T) < \varepsilon$, то число $\overline{I} - \underline{I}$ меньше любого наперед заданного $\varepsilon > 0$. Это означает, что $\overline{I} - \underline{I} = 0$.

Обозначим через I это число $\underline{I} = \overline{I}$ и покажем, что это I — интеграл. В силу (5.2) имеем $\underline{S}(T) \leqslant I \leqslant \overline{S}(T)$, Кроме того, $\underline{S}(T) \leqslant S(T;\Xi) \leqslant \overline{S}(T)$. Поэтому $|S(T;\Xi) - I| \leqslant \overline{S}(T) - \underline{S}(T)$ и, следовательно, для всех разбиений T с $\lambda(T) < \delta$ имеем

$$|S(T;\Xi) - I| \leqslant \overline{S}(T) - \underline{S}(T) < \varepsilon. \quad \square$$

Замечание. Из доказательства теоремы видно, что *если ограниченная функция* $f(x)$ *интегрируема на* $[a,b]$*, то ее верхний и нижний интегралы Дарбу совпадают*: $\overline{I} = \underline{I}$*, причем*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \overline{I} = \underline{I}.$$

Можно показать, что справедливо и обратное утверждение (из $\overline{I} = \underline{I}$ вытекает интегрируемость).

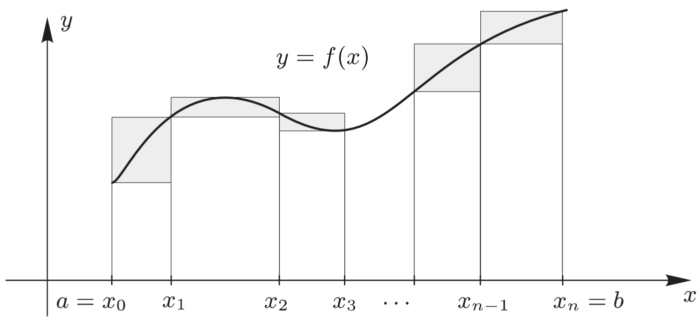
Переформулируем критерий интегрируемости, используя понятие колебания функции.

Определение 5.2. *Колебанием функции* на отрезке $[a,b]$ называется разность $\sup\limits_{x\in[a,b]} f(x) - \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$.

Обозначим через ω_k колебание функции $f(x)$ на отрезке $[x_{k-1}, x_k]$. Ясно, что $\omega_k = M_k - m_k$; поэтому

$$\overline{S}(T) - \underline{S}(T) = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} \omega_k \Delta x_k.$$

На рисунке ниже прямоугольник над отрезком $[x_{k-1}, x_k]$ имеет высоту $\omega_k = M_k - m_k$. Таким образом, сумма площадей таких прямоугольников и составляет величину $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \omega_k \Delta x_k$.



Теорема 5.1$'$ (критерий интегрируемости). *Ограниченная на отрезке* $[a,b]$ *функция интегрируема на нем тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{\lambda(T)\to 0} \sum_{k=1}^{n} \omega_k \Delta x_k = 0.$$

Замечание. Можно показать (сделать это не очень просто, и мы не будем этим заниматься), что *ограниченная на отрезке* $[a,b]$ *функция интегрируема на нем тогда и только тогда, когда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует разбиение* T*, такое, что*

$$\sum_{k=1}^{n} \omega_k \Delta x_k < \varepsilon.$$

Пример 5.3. Рассмотрим функцию $y = x$ на $[a,b]$. Для любого отрезка $[x_{k-1}, x_k]$ имеем $\omega_k = x_{k-1} - x_k = \Delta x_k$. Поэтому

$$\sum_{k=1}^{n} \omega_k \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k \Delta x_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} \lambda(T) \Delta x_k = \lambda(T) \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = \lambda(T)(b-a) \to 0$$

при $\lambda(T) \to 0$. Согласно теореме 5.1$'$, функция интегрируема.

Теорема 5.4. *Непрерывная на отрезке* $[a,b]$ *функция интегрируема на нем.*

Доказательство. Из непрерывности функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ вытекает, что $f(x)$ равномерно непрерывна на отрезке $[a,b]$ (теорема Кантора). Следовательно, для любого числа $\varepsilon_1 > 0$ (мы возьмем $\varepsilon_1 = \varepsilon/(b-a)$) существует $\delta > 0$, такое, что если $|x_1 - x_2| < \delta$, то $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon_1$. Это означает, что если $\Delta x_k < \delta$, то для всех точек x_1, x_2 из $[x_{k-1}, x_k]$ справедливо неравенство $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon_1$. В частности, $|M_k - m_k| < \varepsilon_1$, где

$M_k = f(c_{\max})$, $m_k = f(c_{\min})$; здесь $c_{\max}$ и $c_{\min}$ — точки, в которых функция $f(x)$ принимает максимальное и минимальное значения на отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ (такие точки существуют по теореме Вейерштрасса). Поэтому, если $\lambda(T) < \delta$, то $\omega_k = M_k - m_k < \varepsilon_1$ для всех k и

$$\sum_{k=1}^{n} \omega_k \Delta x_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_1 \Delta x_k = \varepsilon_1 \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = \varepsilon_1 (b-a) = \varepsilon.$$

В итоге имеем: для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое, что для всех разбиений T с $\lambda(T) < \delta$ справедлива оценка $\sum\limits_{k=1}^{n} \omega_k \Delta x_k < \varepsilon$, т. е.

$$\lim_{\lambda(T)\to 0} \sum_{k=1}^{n} \omega_k \Delta x_k = 0.$$

По критерию интегрируемости функция интегрируема. □

Замечание 5.5. Если $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, то для вычисления интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ можно выбрать любую последовательность разбиений T_m, такую, что $\lambda(T_m) \to 0$ при $m \to \infty$ и для каждого разбиения T_m задать произвольный набор точек Ξ_m. Затем вычислить предел последовательности $S(T_m, \Xi_m)$ при $m \to \infty$. (Это проще, чем вычислять $\lim\limits_{\lambda(T)\to 0} S(T, \Xi)$.)

В самом деле, для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое, что для всех T с $\lambda(T) < \delta$ справедливо неравенство $|S(T, \Xi) - I| < \varepsilon$, Поэтому, начиная с некоторого m_0 (при $m \geqslant m_0$), имеем $|S(T_m, \Xi_m) - I| < \varepsilon$, т. е. $S(T_m, \Xi_m) \to 0$ при $m \to \infty$.

Пример 5.6. Вычислим интеграл $\int_0^1 x\,dx$.

Пусть T_m — разбиение отрезка $[0, 1]$ на m отрезков длины $1/m$. Ясно, что при этом $\lambda(T_m) = 1/m \to 0$ при $m \to \infty$. Разбиение T_m состоит из точек $\{x_0^{(m)}, x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \ldots, x_n^{(m)}\}$, где $x_k^{(m)} = k/m$, $k = 0, 1, \ldots, m$. На каждом из отрезков $[x_{k-1}^{(m)}, x_k^{(m)}]$ разбиения T_m в качестве точки $\xi_k^{(m)}$ возьмем для простоты правый конец отрезка, т. е. положим $\xi_k^{(m)} = x_k^{(m)}$. Тогда

$$S(T_m, \Xi_m) = \sum_{k=1}^{m} f(\xi_k^{(m)}) \Delta x_k = \sum_{k=1}^{m} f\left(\frac{k}{m}\right)\frac{1}{m} = \sum_{k=1}^{m} \frac{k}{m}\,\frac{1}{m} = \frac{1}{m^2}\sum_{k=1}^{m} k = \frac{1}{m^2}\,\frac{m(m+1)}{2} = \frac{m+1}{2m} \to \frac{1}{2}\,.$$

Итак, $\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$.

Классы интегрируемых функций.

Одну из теорем, которая по смыслу должна была попасть в этот раздел, мы уже доказали: *все непрерывные на отрезке $[a, b]$ функции интегрируемы на нем.*

Теорема 5.7. *Монотонная на отрезке $[a, b]$ функция интегрируема на нем.*

Доказательство. Пусть для определенности $f(x)$ не убывает на $[a, b]$. Рассмотрим конструкцию $\overline{S}(T) - \underline{S}(T) = \sum\limits_{k=1}^{n} \omega_k \Delta x_k = \sum\limits_{k=1}^{n} (M_k - m_k)\Delta x_k$. Для не убывающей на $[x_{k-1}, x_k]$ функции имеем $m_k = f(x_{k-1})$, $M_k = f(x_k)$. Поэтому

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \omega_k \Delta x_k &= \sum_{k=1}^{n} (f(x_k) - f(x_{k-1}))\Delta x_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} (f(x_k) - f(x_{k-1}))\lambda(T) = \lambda(T)\sum_{k=1}^{n} (f(x_k) - f(x_{k-1})) \\ &= \lambda(T)((f(x_1) - f(x_0)) + (f(x_2) - f(x_1)) + \ldots + (f(x_n) - f(x_{n-1}))) \\ &= \lambda(T)(f(x_n) - f(x_0)) = \lambda(T)(f(b) - f(a)) \to 0 \qquad \text{при } \lambda(T) \to 0.\end{aligned}$$

Итак, $\overline{S}(T) - \underline{S}(T) \to 0$ при $\lambda(T) \to 0$. □

Замечание 5.8. Монотонная на $[a, b]$ функция автоматически ограничена на нем, поскольку (для не убывающей функции) $f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b)$ для всех $x \in [a, b]$.

Предложение 5.9. *Пусть $f(x)$ определена и ограничена на $[a, b]$ и интегрируема на любом отрезке $[a + \eta, b]$. Тогда $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, причем*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\eta\to+0} \int_{a+\eta}^b f(x)\,dx.$$

Доказательство. Докажем, что $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$.

Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно. Функция $f(x)$ ограничена на $[a, b]$, т.е. существует константа C, такая, что $|f(x)| \leqslant C$ на $[a, b]$. Выберем $\eta > 0$ настолько малым, что

$$\eta \cdot 2C < \frac{\varepsilon}{3}.$$

На отрезке $[a,b]$ функция $f(x)$ интегрируема. Поэтому по критерию интегрируемости существует $\delta_1>0$, такое, что для любого разбиения T' отрезка $[a+\eta,\beta]$ с параметром $\lambda(T')<\delta_1$ справедливо неравенство

$$\sum_{T'}\omega_k\Delta x_k<\frac{\varepsilon}{3}.$$

Пусть теперь $\delta=\min\{\eta,\delta_1\}$ (в частности, $\delta\leqslant\eta$). Покажем, что если T — любое разбиение отрезка $[a,b]$ с $\lambda(T)<\delta$, то $\sum\omega_k\Delta x_k<\varepsilon$.

В самом деле,

$$\sum_T\omega_k\Delta x_k=\sum_{k=1}^{n_1-1}\omega_k\Delta x_k+\omega_{n_1}\Delta x_{n_1}+\sum_{k=n_1}^{n}\omega_k\Delta x_k,$$

где первая сумма соответствует отрезкам разбиения, находящимся левее точки $a+\eta$, слагаемое $\omega_{n_1}\Delta x_{n_1}$ соответствует отрезку, содержащему точку $a+\eta$ (если эта точка принадлежит разбиению, то это слагаемое отсутствует), последняя сумма соответствует отрезкам разбиения, находящимся правее точки $a+\eta$.

Нетрудно понять, что $\omega_k\leqslant 2C$ для любого k (почему?); поэтому

$$\sum_{k=1}^{n_1-1}\omega_k\Delta x_k<2C\sum_{k=1}^{n_1-1}\Delta x_k\leqslant 2C\eta<\frac{\varepsilon}{3}$$

(мы воспользовались здесь условием, исходя из которого выбрали в начале доказательства величину η). Кроме того,

$$\omega_{n_1}\Delta x_{n_1}\leqslant 2C\Delta x_{n_1}\leqslant 2C\delta\leqslant 2C\eta<\frac{\varepsilon}{3}.$$

Наконец, добавив к точкам $x_{n_1},\dots,x_n$ точку $a+\eta$, получим разбиение T' отрезка $[a+\eta,b]$ с параметром $\lambda(T')<\delta$ (проверьте!); теперь нетрудно оценить последнюю сумму:

$$\sum_{n=n_1}^{n}\omega_k\Delta x_n\leqslant\sum_{T'}\omega_k\Delta x_n<\frac{\varepsilon}{3}.\quad\square$$

Замечание. Разумеется, можно сформулировать и доказать аналогичное предложение с «неприятностью» на левом конце отрезка.

Лекция 6

Из предложения 5.9 сразу вытекает следующая

Теорема 6.1. *Пусть функция $f(x)$ ограничена на $[a,b]$ и непрерывна по крайней мере на $[a,b)$. Тогда она интегрируема на $[a,b]$.*

Разумеется, полуинтервал $[a,b)$ в этой теореме можно заменить на полуинтервал $(a,b]$.

Например, функция

$$f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x}, & x>0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

интегрируема на $[0,1]$.

Предложение 6.2. *Пусть $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$. Тогда $f(x)$ интегрируема на любом $[c,d]\subset[a,b]$.*

Доказательство. Согласно критерию интегрируемости (теорема 5.1′), для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$, такое, что для любого разбиения T отрезка $[a,b]$ с $\lambda(T)<\delta$ справедливо неравенство $\sum\limits_T\omega_k\Delta x_k<\varepsilon$.

Пусть T_1 — любое разбиение отрезка $[c,d]$ с $\lambda(T_1)<\delta$. Продолжим разбиение T_1 с отрезка $[c,d]$ на весь отрезок $[a,b]$ так, чтобы параметр не увеличился: $\lambda(T)=\lambda(T_1)$ (для этого достаточно расставлять точки x_k на расстоянии не большем чем $\lambda(T_1)$ друг от друга). Тогда

$$\sum_{T_1}\omega_k\Delta x_k\leqslant\sum_T\omega_k\Delta x_k<\varepsilon.$$

По теореме 5.1’ функция $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$. $\square$

Предложение 6.3. *Пусть $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$ и на $[b,c]$. Тогда $f(x)$ интегрируема на $[a,c]$.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon>0$ произвольно. По критерию интегрируемости (теорема 5.1′) для $\varepsilon_1=\varepsilon/2$ существуют разбиения T_1 и T_2 отрезков $[a,b]$ и $[b,c]$, такие, что

$$\sum_{T_1}\omega_k\Delta x_k<\varepsilon_1\quad\text{и}\quad\sum_{T_2}\omega_k\Delta x_k<\varepsilon_1.$$

Составим разбиение T отрезка $[a, c]$ из разбиений T_1 и T_2. Тогда

$$\sum_T \omega_k \Delta x_k = \sum_{T_1} \omega_k \Delta x_k + \sum_{T_2} \omega_k \Delta x_k < \varepsilon_1 + \varepsilon_1 = \varepsilon.$$

Вновь применяя теорему 5.1′(см. также замечание после нее), получаем, что функция интегрируема на отрезке $[a, c]$. □

Из теоремы 6.1 и предложения 6.3 немедленно получается следующий вариант теоремы 6.1:

Теорема 6.1′. *Пусть функция $f(x)$ ограничена на $[a, b]$ и непрерывна по крайней мере на (a, b). Тогда она интегрируема на $[a, b]$.*

Эта теорема в свою очередь легко обобщается следующим образом:

Теорема 6.4. *Пусть ограниченная функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ за исключением может быть конечного числа точек. Тогда $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$.*

Доказательство. Действительно, если $c_1, \ldots, c_m$ — точки разрыва, то по теореме 6.2′ эта функция интегрируема на отрезках $[a, c_1], [c_1, c_2], \ldots, [c_m, b]$. А по предложению 6.4 она интегрируема на $[a, c_2], [a, c_3], \ldots, [a, b]$. □

Свойства определенного интеграла.

Теорема 6.5 (аддитивность интеграла). *Пусть $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$ и $[b, c]$. Тогда $f(x)$ интегрируема на $[a, c]$ и*

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx.$$

Доказательство. Первая часть (интегрируемость на $[a, c]$) уже доказана в предложении 6.3. Возьмем разбиения $T_1^{(m)}$ на $[a, b]$, такие, что $\lambda(T_1^{(m)}) \to 0$ и разбиения $T_2^{(m)}$ на $[b, c]$, такие, что $\lambda(T_2^{(m)}) \to 0$. Разбиение $T^{(m)}$ отрезка $[a, c]$ составим из разбиений $T_1^{(m)}$ и $T_2^{(m)}$: $T^{(m)} = T_1^{(m)} \cup T_2^{(m)}$. Ясно, что $\lambda(T^{(m)}) = \max\{\lambda(T_1^{(m)}), \lambda(T_2^{(m)})\} \to 0$ при $m \to \infty$. Кроме того,

$$S(T^{(m)}, \Xi^{(m)}) = S(T_1^{(m)}, \Xi_1^{(m)}) + S(T_2^{(m)}, \Xi_2^{(m)}).$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $m \to \infty$, получаем нужное равенство для интегралов. □

До сих пор мы имели дело с интегралами $\int_a^b f(x)\,dx$, где $a < b$. Откажемся от этого ограничения и будем по определению считать, что

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0 \qquad \text{при } a = b,$$
$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx \qquad \text{при } a > b.$$

Теорема 6.5′ (обобщенная аддитивность). *Пусть $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$. Тогда для любых трех точек $c_1, c_2, c_3 \in [a, b]$ справедливо соотношение*

$$\int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx = \int_{c_1}^{c_3} f(x)\,dx + \int_{c_3}^{c_2} f(x)\,dx.$$

Доказательство. Действительно, если $c_1 < c_3 < c_2$, то это обычное свойство аддитивности. Если $c_1 < c_2 < c_3$, то в силу аддитивности имеем

$$\int_{c_1}^{c_3} f(x)\,dx = \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx + \int_{c_2}^{c_3} f(x)\,dx,$$

откуда

$$\int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx = \int_{c_1}^{c_3} f(x)\,dx - \int_{c_2}^{c_3} f(x)\,dx = \int_{c_1}^{c_3} f(x)\,dx + \int_{c_3}^{c_2} f(x)\,dx.$$

Остальные варианты разбираются аналогично. □

Теорема 6.6 (линейность). *Пусть $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a, b]$. Тогда для любых α и β функция $\alpha f(x) + \beta g(x)$ также интегрируема на $[a, b]$, причем*

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx. \tag{*}$$

Доказательство. Получается из свойства линейности для сумм

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n}(\alpha f(\xi_k)+\beta g(\xi_k))\Delta x_k}_{S_{\alpha f+\beta g}(T;\Xi)} = \underbrace{\alpha\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k}_{\alpha S_f(T;\Xi)} + \underbrace{\beta\sum_{k=1}^{n} g(\xi_k)\Delta x_k}_{\beta S_g(T;\Xi)}.$$

Переходим здесь к пределу при $\lambda(T)\to 0$ и получаем равенство $(*)$. $\square$

Теорема 6.7 (интегрируемость произведения интегрируемых функций). *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a,b]$. Тогда их произведение $f(x)g(x)$ — интегрируемая на $[a,b]$ функция.*

Доказательство. Предварительно заметим, что для любых двух точек $\xi_1,\xi_2\in[x_{k-1},x_k]$ справедлива оценка $|f(\xi_1)-f(\xi_2)|\leqslant \omega_k=\omega_k(f)$ (напомним, что $\omega_k(f)=M_k(f)-m_k(f)=\sup\limits_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x)-\inf\limits_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x)$). Кроме того, из интегрируемости функций f и g вытекает их ограниченность: существуют постоянные C_1 и C_2, такие, что $|f(x)|\leqslant C_1$, $|g(x)|\leqslant C_2$ при всех $x\in[a,b]$.

Оценим разность $f(\xi_1)g(\xi_1)-f(\xi_2)g(\xi_2)$ при $\xi_1,\xi_2\in[x_{k-1},x_k]$ следующим образом:

$$\begin{aligned} f(\xi_1)g(\xi_1)-f(\xi_2)g(\xi_2) &= (f(\xi_1)-f(\xi_2))g(\xi_1)+f(\xi_2)(g(\xi_1)-g(\xi_2))\\ &\leqslant |g(\xi_1)||f(\xi_1)-f(\xi_2)|+|f(\xi_2)||g(\xi_1)-g(\xi_2)|\\ &\leqslant C_1|f(\xi_1)-f(\xi_2)|+C_2|g(\xi_1)-g(\xi_2)|\leqslant C_1\omega_k(f)+C_2\omega_k(g). \end{aligned}$$

Итак, для функции $\varphi(x)=f(x)g(x)$ имеем:

$$\varphi(\xi_1)-\varphi(\xi_2)\leqslant C_1\omega_k(f)+C_2\omega_k(g), \qquad \xi_1,\xi_2\in[x_{k-1},x_k].$$

Переходя в этом неравенстве к sup по ξ_1 и к inf по ξ_2, получаем оценку

$$\underbrace{M_k(\varphi)-m_k(\varphi)}_{\omega_k(\varphi)}\leqslant C_1\omega_k(f)+C_2\omega_k(g),$$

откуда

$$\sum_{k=1}^{n}\omega_k(fg)\Delta x_k\leqslant C_1\underbrace{\sum_{k=1}^{n}\omega_k(f)\Delta x_k}_{\to 0 \text{ при } \lambda(T)\to 0}+C_2\underbrace{\sum_{k=1}^{n}\omega_k(g)\Delta x_k}_{\to 0 \text{ при } \lambda(T)\to 0}.$$

Таким образом,

$$\sum_{k=1}^{n}\omega_k(fg)\Delta x_k\to 0,$$

следовательно функция fg интегрируема. $\square$

Лекция 7

Предложение 7.1. *Пусть $f(x)$ неотрицательна и интегрируема на $[a,b]$. Тогда*

$$\int_a^b f(x)\,dx\geqslant 0$$

Доказательство. Переходя к пределу при $\lambda(T)\to 0$ в очевидном неравенстве

$$S(T;\Xi)=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k\geqslant 0,$$

получаем нужный результат. $\square$

Теорема 7.2 (об интегрировании неравенств). *Пусть $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a,b]$ и $f(x)\leqslant g(x)$ на $[a,b]$, Тогда*

$$\int_a^b f(x)\,dx\leqslant\int_a^b g(x)\,dx.$$

Доказательство. Функция $g(x)-f(x)$ неотрицательна и интегрируема на $[a,b]$. Поэтому

$$\int_a^b g(x)\,dx-\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b (g(x)-f(x))\,dx\geqslant 0. \quad \square$$

Теорема 7.3 (об оценке интеграла). *Пусть $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$. Тогда функция $|f(x)|$ тоже интегрируема на $[a,b]$ и*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|\leqslant\int_a^b |f(x)|\,dx. \tag{7.1}$$

Доказательство. Пусть $g(x)=|f(x)|$. Тогда

$$|g(\xi_1)-g(\xi_2)|=||f(\xi_1)|-|f(\xi_2)||\leqslant|f(\xi_1)-f(\xi_2)|.$$

Следовательно, $|g(\xi_1)-g(\xi_2)|\leqslant\omega_k(f)$ для всех $\xi_1,\xi_2\in[x_{k-1},x_k]$. Поэтому $\omega_k(g)\leqslant\omega_k(f)$ (ср. доказательство интегрируемости произведения) и, значит,

$$\sum_{k=1}^{n}\omega_k(g)\Delta x_k\leqslant\sum_{k=1}^{n}\omega_k(f)\Delta x_k.$$

По критерию интегрируемости при $\lambda(T)\to 0$ правая часть стремится к 0. Таким образом, $\sum\limits_{k=1}^{n}\omega_k(g)\Delta x_k\to 0$, т. е. функция $g(x)=|f(x)|$ (по критерию интегрируемости) интегрируема.

Осталось доказать неравенство (7.1). Проинтегрируем неравенство $-|f(x)|\leqslant f(x)\leqslant|f(x)|$, пользуясь теоремой 7.2:

$$-\int_a^b|f(x)|\,dx\leqslant\int_a^b f(x)\,dx\leqslant\int_a^b|f(x)|\,dx$$

Это двойное неравенство эквивалентно неравенству (7.1). □

Теорема 7.4 (интегральная теорема о среднем). *Пусть $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a,b]$, $g(x)\geqslant 0$ и $m\leqslant f(x)\leqslant M$ Тогда существует число $\mu\in[m,M]$, такое, что*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx=\mu\int_a^b g(x)\,dx.$$

Доказательство. Из оценки $mg(x)\leqslant f(x)g(x)\leqslant Mg(x)$ имеем

$$m\int_a^b g(x)\,dx\leqslant\int_a^b f(x)g(x)\,dx\leqslant M\int_a^b g(x)\,dx. \tag{7.2}$$

Далее, если $\int_a^b g(x)\,dx=0$, то в силу (7.2) $\int_a^b f(x)g(x)\,dx=0$ и годится любое μ. Если же $\int_a^b g(x)\,dx>0$, то положим

$$\mu=\frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx}.$$

В силу неравенств (7.2) имеем $m\leqslant\mu\leqslant M$. □

Следствие 7.5. *Пусть $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$ и $m\leqslant f(x)\leqslant M$. Тогда*

$$m\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\leqslant M.$$

Действительно, это неравенство получается из теоремы 7.4, если положить $g(x)\equiv 1$.

Определение 7.6. Число

$$\mu=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

называют *средним значением функции $f(x)$ на $[a,b]$*.

Тем самым следствие 7.5 звучит так:

Если интегрируемая функция $f(x)$ принимает значения на отрезке $[m,M]$, то среднее значение этой функции принадлежит этому отрезку.

Интеграл с переменным верхним пределом. Формула Ньютона–Лейбница.

Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$. Рассмотрим функцию

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt,\qquad x\in[a,b].$$

Эту функцию называют интегралом с переменным верхним пределом.

Теорема 7.7. *Если $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$, то $F(x)$ непрерывна на $[a,b]$.*

Доказательство. Пусть $x_0\in[a,b]$ — произвольная точка. Запишем приращение функции $F(x)$ в этой точке, отвечающее приращению аргумента Δx:

$$\Delta F(x_0)=F(x_0+\Delta x)-F(x_0)=\int_a^{x_0+\Delta x}f(t)\,dt-\int_a^{x_0}f(t)\,dt=\int_{x_0}^{a}f(t)\,dt+\int_a^{x_0+\Delta x}f(t)\,dt=\int_{x_0}^{x_0+\Delta x}f(t)\,dt.$$

Интегрируемая функция $f(x)$ ограничена ($|f(x)| \leqslant M$); поэтому

$$|\Delta F(x_0)| \leqslant \left| \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)\,dt \right| \leqslant \left| \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} |f(t)|\,dt \right| \leqslant \left| \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} M\,dt \right| = M|\Delta x|.$$

(Поясним, что здесь величина Δx может иметь любой знак.)

Итак, $|\Delta F(x_0)| \leqslant M|\Delta x|$. Следовательно, $\Delta F(x_0) \to 0$ при $\Delta x \to 0$, т. е. $F(x)$ непрерывна в точке x_0. □

Теорема 7.8 (о дифференцировании интеграла с переменным верхним пределом). *Пусть $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$ и непрерывна в точке $x_0 \in [a,b]$. Тогда функция $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ дифференцируема в точке x_0 и*

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

Доказательство опирается на лемму.

Лемма 7.9. *Пусть $\varphi(x)$ интегрируема на $[a,b]$ и $\varphi(x) \to 0$ при $x \to x_0$. Тогда*

$$\frac{1}{x-x_0} \int_{x_0}^{x} \varphi(t)\,dt \to 0 \quad \textit{при } x \to x_0.$$

Доказательство леммы. По определению для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое, что $|\varphi(x)| < \varepsilon$ при $|x - x_0| < \delta$. Тогда, если $0 < x - x_0 < \delta$, то

$$\left| \frac{1}{x-x_0} \int_{x_0}^{x} \varphi(t)\,dt \right| \leqslant \frac{1}{x-x_0} \int_{x_0}^{x} |\varphi(t)|\,dt \leqslant \frac{1}{x-x_0}\, \varepsilon(x-x_0) = \varepsilon$$

(при $-\delta < x - x_0 < 0$ оценка аналогична). □

Доказательство теоремы 7.8. Для функции $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ в точке x_0 имеем

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta F}{\Delta x} &= \frac{F(x_0+\Delta x) - F(x_0)}{\Delta x} = \frac{\int_a^{x_0+\Delta x} f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt}{\Delta x} \\
&= \frac{1}{\Delta x} \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)\,dt = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} (f(x_0) + (f(t) - f(x_0)))\,dt \\
&= \frac{1}{\Delta x}\, f(x_0) \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} dt + \frac{1}{\Delta x} \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} (f(t) - f(x_0))\,dt = f(x_0) + \frac{1}{\Delta x} \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} (f(t) - f(x_0))\,dt.
\end{aligned}$$

Здесь $f(t) - f(x_0) \to 0$ при $t \to x_0$; поэтому

$$\frac{1}{\Delta x} \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} (f(t) - f(x_0))\,dt \to 0 \quad \text{при } \Delta x \to 0$$

в силу леммы 7.9.

Таким образом, $\frac{\Delta F}{\Delta x} \to f(x_0)$ при $\Delta x \to 0$. □

Замечание. В теореме 7.8 при $x_0 = a$ имеется в виду производная в точке a справа: $F'_+(a) = f(a)$, а при $x_0 = b$ — производная в точке b слева: $F'_-(b) = f(b)$.

Следствие 7.10 (о существовании первообразной). *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$. Тогда функция*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

является первообразной для $f(x)$ на $[a,b]$.

Замечание. Функция $F(x) = \int_{x_0}^x f(t)\,dt$, где x_0 — любая точка отрезка $[a,b]$, также является первообразной для $f(x)$ на $[a,b]$, поскольку

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt + C, \quad \text{где } C = \int_{x_0}^{a} f(t)\,dt.$$

Отметим также, что если $f(x)$ непрерывна на (a,b), то для любой точки $x_0 \in (a,b)$ функция

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$$

является первообразной на (a,b).

Теорема 7.11 (Ньютона–Лейбница). *Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$ и $F(x)$ — любая первообразная для $f(x)$. Тогда*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Доказательство. Из следствия 7.10 имеем: $F_1(x) = \int_a^x f(t)dt$ — первообразная для $f(x)$; поэтому $F(x) = F_1(x) + C$, где C — некоторая константа. Эта константа C легко вычисляется: при $x = a$ имеем $F(a) = \int_a^a f(t)\,dt + C = C$. Значит, $C = F(a)$. С другой стороны, $F(b) = \int_a^b f(t)\,dt + C$, следовательно

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - C = F(b) - F(a). \quad \square$$

Для разности $F(b) - F(a)$ часто используют обозначение $F(x)\big|_a^b$.

Пример. При $n \neq m$

$$\int_0^{2\pi} \sin nx \sin mx\,dx = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(\cos(n-m)x - \cos(n+m)x)\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(n-m)x}{n-m} - \frac{\sin(n+m)x}{n+m}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 0.$$

Лекция 8

Теорема 8.1 (о замене переменной в определенном интеграле). *Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$ и $\varphi(t)$ непрерывно дифференцируема на $[\alpha,\beta]$ и принимает значения на $[a,b]$, причем $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$. Тогда*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

Доказательство. Пусть $F(x)$ — первообразная для $f(x)$ на $[a,b]$, т.е. $F'(x) = f(x)$. Тогда

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

(теорема Ньютона–Лейбница). С другой стороны, $F(\varphi(t))$ — первообразная функции $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ (так как $(F(\varphi(t)))' = f(\varphi(t))\varphi'(t)$). Следовательно,

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a). \quad \square$$

Замечание. Из доказательства видно, что формула остается справедливой, даже если $\varphi(x)$ принимает значения за пределами отрезка $[a,b]$. Разумеется, при этом функция $f(x)$ должна быть определена (и непрерывна) на соответствующем множестве.

Пример. Вычислим интеграл $\displaystyle\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\,dx$:

$$\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\,dx = \left\{\begin{array}{l} x = R\sin t \\ \alpha = 0,\ \beta = \pi/2 \end{array}\right\} = \int_0^{\pi/2} \sqrt{R^2 - R^2\sin^2 t}\,R\cos t\,dt$$
$$= R^2 \int_0^{\pi/2} |\cos t| \cos t\,dt = R^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,dt = R^2 \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2t}{2}\,dt$$
$$= \frac{1}{2} R^2 \int_0^{\pi/2} dt + \frac{1}{2} R^2 \int_0^{\pi/2} \cos 2t\,dt = \frac{\pi R^2}{4} - \frac{1}{2} R^2 \frac{\sin 2t}{2}\bigg|_0^{\pi/2} = \frac{\pi R^2}{4}.$$

Теорема 8.2 (об интегрировании по частям для определенного интеграла). *Пусть u, v — непрерывно дифференцируемые на $[a,b]$ функции. Тогда*

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x)\big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx.$$

Доказательство. Проинтегрируем по отрезку $[a,b]$ равенство

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

Получим равенство

$$\int_a^b (u(x)v(x))'dx = \int_a^b u'(x)v(x)\,dx + \int_a^b u(x)v'(x)\,dx.$$

Остается заметить, что в силу формулы Ньютона–Лейбница

$$\int_a^b (u(x)v(x))'dx = u(x)v(x)\big|_a^b. \quad \square$$

Пример.

$$\int_1^2 x\ln x\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2}(\ln x)'\,dx = 2\ln 2 - \frac{1}{2}\int_1^2 x\,dx = 2\ln 2 - \frac{3}{4}.$$

Приложения определенного интеграла.

1. *Площадь криволинейной трапеции.* Рассмотрим множество

$$G = \begin{cases} a \leqslant x \leqslant b, \\ 0 \leqslant y \leqslant f(x). \end{cases}$$

Если множество G имеет площадь S_G, то по здравому смыслу для любой пары множеств G_1, G_2, таких, что $G_1 \subset G \subset G_2$, должны выполняться неравенства

$$S_{G_1} \leqslant S_G \leqslant S_{G_2}.$$

Напомним, что нижняя сумма Дарбу $\underline{S}(T)$ — площадь некоторого множества $G_1 \subset G$, представляющего собой объединение конечного числа прямоугольников. Верхняя сумма Дарбу $\overline{S}(T)$ — площадь некоторого множества $G_2 \supset G$.

Это означает, что для всех разбиений T должны быть справедливы неравенства

$$\underline{S}(T) \leqslant S_G \leqslant \overline{S}(T).$$

Если функция $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$, то существует единственное число $I = \int_a^b f(x)\,dx$, удовлетворяющее этим неравенствам при всех T, поскольку в этом случае

$$\sup_T \underline{S}(T) = \underline{I} = I = \overline{I} = \inf_T \overline{S}(T).$$

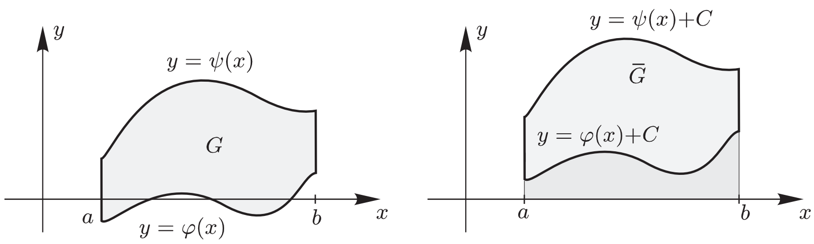
Таким образом (если функция $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$), получаем

$$S_G = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Если $\underline{I} < \overline{I}$, т. е. функция $f(x)$ не интегрируема, то площадь S_G не определена.

Рассмотрим теперь множество вида

$$G = \begin{cases} a \leqslant x \leqslant b, \\ \varphi(x) \leqslant y \leqslant \psi(x). \end{cases}$$



Сдвинем фигуру G вверх на C, где C — любое число, превышающее $\min\limits_{x\in[a;b]} \varphi(x)$. Для трех фигур

$$\overline{G} = \begin{cases} a \leqslant x \leqslant b, \\ \varphi(x) + C \leqslant y \leqslant \psi(x) + C, \end{cases} \qquad \overline{G}_1 = \begin{cases} a \leqslant x \leqslant b, \\ 0 \leqslant y \leqslant \psi(x) + C, \end{cases} \qquad \overline{G}_2 = \begin{cases} a \leqslant x \leqslant b, \\ 0 \leqslant y < \varphi(x) + C, \end{cases}$$

имеем соотношение $\overline{G} \cup \overline{G}_2 = \overline{G}_1$, причем $\overline{G} \cap \overline{G}_2 = \varnothing$; поэтому

$$S_G = S_{\overline{G}} = S_{\overline{G}_1} - S_{\overline{G}_2} = \int_a^b (\psi(x) + C)\,dx - \int_a^b (\varphi(x) + C)\,dx = \int_a^b (\psi(x) - \varphi(x))\,dx.$$

Итак, если $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ интегрируемы на $[a,b]$ то

$$\boxed{S_G = \int_a^b (\psi(x) - \varphi(x))\,dx.}$$

Пример. Найдем площадь эллипса, заданного уравнением $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Эта кривая является границей фигуры

$$\begin{cases} -a \leqslant x \leqslant a, \\ -b\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2}} \leqslant y \leqslant b\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2}}. \end{cases}$$

Таким образом,

$$S = \int_{-a}^{a} \left(b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} - \left(-b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \right) \right) dx = 2b \int_{-a}^{a} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\, dx = \left\{ \begin{matrix} x = a\sin t,\ t \in [-\pi/2, \pi/2] \\ dx = a\cos t\, dt \end{matrix} \right\}$$

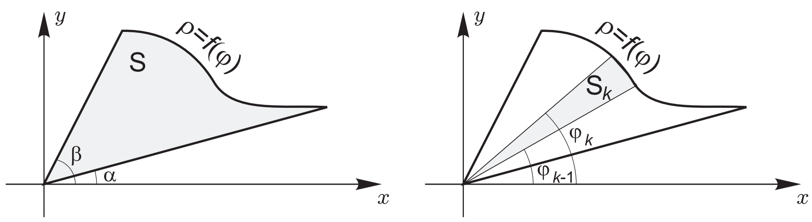
$$= 2b \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2 t}\, a\cos t\, dt = 2ab \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t\, dt = 2ab \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1 - \cos 2t}{2}\, dt = \pi ab + ab \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos 2t\, dt = \pi ab.$$

2. *Площадь криволинейного сектора. Полярные координаты* точки на плоскости — это пара чисел (φ, ρ), где $\varphi \in (-\pi; \pi]$, $\rho \geqslant 0$. Полярный угол φ — это угол между вектором, направленным из начала координат в эту точку, и осью Ox, ρ — расстояние от начала координат до этой точки. Такая пара чисел (т. е. полярные координаты) однозначно задает точку на плоскости. Не трудно вывести формулы, связывающие декартовы координаты (x, y) точки и ее полярные координаты (ρ, φ):

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \varphi \text{ определяется из уравнения } \operatorname{tg}\varphi = y/x \text{ или } \operatorname{ctg}\varphi = x/y. \end{cases}$$

Криволинейным сектором будем называть множество вида

$$\begin{cases} \alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta, \\ 0 \leqslant \rho \leqslant f(\varphi). \end{cases}$$



Для того чтобы найти площадь этого сектора, разобьем сегмент $[\alpha, \beta]$ на секторы точками $\alpha = \varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}, \varphi_n$ β. Сектор $\Omega_k = \begin{cases} \varphi_{k-1} \leqslant \varphi \leqslant \varphi_k, \\ 0 \leqslant \rho \leqslant f(\varphi), \end{cases}$ лежит внутри кругового сектора $\overline{\Omega}_k$ радиуса $M_k = \sup\limits_{\varphi \in [\varphi_{k-1}, \varphi_k]} f(\varphi)$ и накрывает сектор $\underline{\Omega}_k$ радиуса $m_k = \inf\limits_{\varphi \in [\varphi_{k-1}, \varphi_k]} f(\varphi)$. Вспоминая формулу $S = \frac{1}{2} r^2 \alpha$ для площади кругового сектора с радиусом r и углом α, получаем из вытекающих из наших рассуждений неравенств $S_{\underline{\Omega}_k} \leqslant S_{\Omega_k} \leqslant S_{\overline{\Omega}_k}$ оценку

$$\tfrac{1}{2} m_k^2 \Delta\varphi_k \leqslant S_{\Omega_k} \leqslant \tfrac{1}{2} M_k^2 \Delta\varphi_k,$$

которая влечет за собой неравенства

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} m_k^2 \Delta\varphi_k \leqslant S_\Omega \leqslant \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} M_k^2 \Delta\varphi_k,$$

или, что то же,

$$\underline{S}(T) \leqslant S_\Omega \leqslant \overline{S}(T),$$

где $\underline{S}(T)$ и $\overline{S}(T)$ — суммы Дарбу для функции $\frac{1}{2} f^2(\varphi)$.

Таким образом, если функция $f(\varphi)$ интегрируема, то

$$\boxed{S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f^2(\varphi)\, d\varphi.}$$

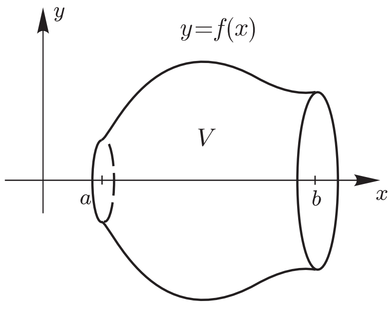
Пример. Рассмотрим *лемнискату Бернулли*, которая в полярных координатах задается формулой $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$. Фигура, которую ограничивает эта кривая, задается неравенствами

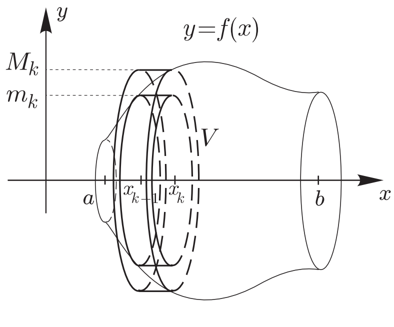
$$G = \begin{cases} -\pi/4 \leqslant \varphi \leqslant \pi/4, \\ 0 \leqslant \rho^2 \leqslant a^2 \cos 2\varphi. \end{cases}$$

Согласно выведенной нами формуле

$$S = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} f^2(\varphi)\, d\varphi = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} a^2 \cos 2\varphi\, d\varphi = a^2 \left. \frac{\sin 2\varphi}{2} \right|_{-\pi/4}^{\pi/4} = a^2.$$

3. *Объем тела вращения*. Пусть $y = f(x) \geqslant 0$ — непрерывная на $[a, b]$ функция. Рассмотрим тело, полученное вращением графика этой функции вокруг оси Ox.





Для того чтобы найти его объем, оценим объем V_k части тела, ограниченную отрезком $[x_{k-1}, x_k]$. Эта часть тела лежит внутри цилиндра с высотой $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ и радиусом основания $M_k = \sup\limits_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x)$ и накрывает цилиндр такой же высоты и с радиусом основания $m_k = \inf\limits_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x)$.

Таким образом,

$$\pi m_k^2 \Delta x_k \leqslant V_k \leqslant \pi M_k^2 \Delta x_k, \tag{8.1}$$

откуда

$$\sum_{k=1}^{n} \pi m_k^2 \Delta x_k \leqslant V \leqslant \sum_{k=1}^{n} \pi M_k^2 \Delta x_k.$$

Итак, $\underline{S}(T) \leqslant V \leqslant \overline{S}(T)$, где $\underline{S}(T)$ и $\overline{S}(T)$ — нижняя и верхняя суммы Дарбу для функции $\pi f^2(x)$ на $[a,b]$. Если эта функция интегрируема на $[a,b]$, то переходя в (8.1) к пределу при $\lambda(T) \to 0$, получаем

$$\boxed{V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx.}$$

Пример. Найдем объем эллипсоида вращения $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.

Это тело получается вращением кривой

$$x = a\sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}}, \qquad z \in [-c, c].$$

Согласно выведенной нами формуле,

$$V = \pi \int_{-c}^{c} \left(a\sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}}\right)^2 dz = \pi \int_{-c}^{c} \left(a^2 - \frac{z^2}{c^2}\right) dz = \pi\left(2ca^2 - \frac{a^2}{c^2}\,\frac{z^3}{3}\bigg|_{-c}^{c}\right) = \frac{4\pi}{3}\,ca^2.$$

Замечание. Отметим (без доказательства), что произвольной фигуры с площадями сечения $S(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, справедлива формула

$$V = \int_a^b S(x)\,dx.$$

Лекция 9

4. *Длина кривой на плоскости.* Пусть для начала кривая является графиком непрерывно дифференцируемой функции $y = f(x)$, $x \in [a,b]$.

Рассмотрим разбиение $T = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n = b\}$. Этому разбиению отвечает ломаная, соединяющая точки $(x_k, f(x_k))$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Длина $l(\Gamma)$ этой ломаной задается формулой

$$l(\Gamma) = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2}.$$

Воспользовавшись формулой Лагранжа, получим

$$l(\Gamma) = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f'(\xi_k)(x_k - x_{k-1}))^2} = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + f'(\xi_k)^2}\,\Delta x_k,$$

где $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$. Сумма справа является интегральной суммой для функции $\sqrt{1 + f'(x)^2}$, отвечающей разбиению T и набору точек $\Theta = \{\xi_1, \ldots, \xi_k\}$. Функция $\sqrt{1 + f'(x)^2}$ непрерывна; поэтому при $\lambda(T) \to 0$ длина ломаной стремится к $\int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx$.

Итак, наше рассуждение показывает, что длиной кривой $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, естественно считать предел при $\lambda(T) \to 0$ длины ломаной, отвечающий разбиению T. Такой предел существует, если $f(x) \in C^1$ на $[a, b]$:

$$\boxed{l(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx.} \tag{9.1}$$

Выведем теперь формулу для длины кривой Γ, заданной параметрически:

$$\Gamma : \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \qquad t \in [\alpha, \beta],$$

где $x(t), y(t) \in C^1$ на $[\alpha, \beta]$. Для простоты пусть $x(t)$ монотонна (скажем, $x'(t) > 0$). Тогда существует обратная функция $t = t(x)$ и Γ является графиком функции $y = y(t(x))$, $x \in [a, b]$, где $a = x(\alpha)$, $b = x(\beta)$. Согласно теореме о замене переменной в определенном интеграле из формулы (9.1) получим

$$\begin{aligned} l(\Gamma) &= \int_a^b \sqrt{1 + (y'_x(x))^2}\, dx = \int_\alpha^\beta \sqrt{1 + (y'_x(x(t)))^2}\, x'_t(t)\, dt \\ &= \int_\alpha^\beta \sqrt{(x'_t(t))^2 + (y'_x(x(t))x'_t(t))^2}\, dt = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x'_t(t))^2 + (y'_t(t))^2}\, dt = \int_\alpha^\beta \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt. \end{aligned}$$

Итак,

$$\boxed{l(\Gamma) = \int_\alpha^\beta \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt.} \tag{9.2}$$

Эта формула справедлива для любой кривой, заданной функциями $x(t)$, $y(t)$ класса C^1 на $[\alpha, \beta]$. Мы не будем доказывать это утверждение.

Отметим, что физический смысл величины $v(t) = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$ — модуль скорости точки в момент времени t, движущейся вдоль кривой Γ.

Пример. Найдем длину арки циклоиды $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 + \cos t), \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$:

$$\begin{aligned} l(\Gamma) &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(a(1 - \cos t))^2 + (-a \sin t)^2}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2a^2 - 2a^2 \cos t}\, dt \\ &= 2a \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1 - \cos t}{2}}\, dt = 2a \int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\, dt = -2a\, \frac{\cos(t/2)}{1/2}\bigg|_0^{2\pi} = 8a. \end{aligned}$$

5. *Площадь поверхности вращения.* Нам необходимо дать определение площади поверхности вращения, образованной кривой $y = f(x)$, $x \in [a, b]$.

Пусть $T = \{a{+}x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n = b\}$ — разбиение отрезка $[a, b]$. Рассмотрим вместо исходной поверхности вращения поверхность вращения, образованную вращением ломаной, соединяющей точки $(x_k, f(x_k))$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Часть этой поверхности вращения, отвечающая отрезку $[x_{k-1}, x_k]$ представляет собой усеченный конус с радиусами основания $R_{k-1} = f(x_{k-1})$ и $R_k = f(x_k)$ и высотой $h = \Delta x_k$. Площадь его боковой поверхности по школьной формуле составляет

$$S_k = 2\pi l\, \frac{R_{k-1} + R_k}{2},$$

где $l = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2}$ — длина образующей усеченного конуса. Таким образом,

$$S_k = \pi(f(x_{k-1}) + f(x_k))\sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2},$$

а вся поверхность вращения, отвечающая ломаной, имеет площадь

$$S(T) = \sum_{k=1}^n \pi(f(x_{k-1}) + f(x_k))\sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2}.$$

Определение. Предел $\lim\limits_{\lambda(T) \to 0} S(T)$ (если он существует) будем называть площадью поверхности вращения.

Для подсчета этого предела вновь воспользуемся формулой

$$\sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2} = \sqrt{1 + f'(\xi_k)^2}\, \Delta x_k$$

(см выше). Сумма $S(T)$ не является интегральной суммой, но близка к ней в следующем смысле:

$$S(T) = \sum_{k=1}^n 2\pi f(\xi_k)\sqrt{1 + f'(\xi_k)^2}\, \Delta x_k + R(T),$$

где

$$R(T) = \sum_{k=1}^{n} \pi(f(x_{k-1}) - f(\xi_k) + f(x_k) - f(\xi_k))\sqrt{1 + f'(\xi_k)^2}\,\Delta x_k$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \pi(f'(\tilde{\xi}_k)(x_{k-1} - \xi_k) + f'(\hat{\xi}_k)(x_k - \xi_k))\sqrt{1 + f'(\xi_k)^2}\,\Delta x_k$$

Здесь $\tilde{\xi}_k \in [x_{k-1}, \xi_k]$ и $\hat{\xi}_k \in [\xi_k, x_k]$; поэтому

$$|x_{k-1} - \xi_k| \leqslant |x_k - x_{k-1}| \leqslant \lambda(T), \qquad |x_k - \xi_k| \leqslant |x_k - x_{k-1}| \leqslant \lambda(T).$$

Функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема, поэтому существует постоянная M, такая, что $|f'(\tilde{\xi}_k)| \leqslant M$, $|f'(\hat{\xi}_k)| \leqslant M$ для всех k. Таким образом,

$$|R(T)| \leqslant \pi \sum_{k=1}^{n} (|f'(\tilde{\xi}_k)| + |f'(\hat{\xi}_k)|)\lambda(T)\sqrt{1 + f'(\xi_k)^2}\,\Delta x_k$$
$$\leqslant \pi \sum_{k=1}^{n} 2M\lambda(T)\sqrt{1 + M^2}\Delta x_k = 2\pi M\sqrt{1 + M^2}(b - a)\lambda(T).$$

Следовательно, $R(T) \to 0$ при $\lambda(T) \to 0$.

Итак,

$$\lim_{\lambda(T)\to 0} S(T) = \lim_{\lambda(T)\to 0} \sum_{k=1}^{n} 2\pi f(\xi_k)\sqrt{1 + f'(\xi_k)^2}\,\Delta x_k + \lim_{\lambda(T)\to 0} R(T) = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx + 0.$$

Таким образом, формула для площади поверхности вращения имеет вид

$$\boxed{S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx.} \tag{9.3}$$

Пример. Вычислим площадь поверхности шара. Шар — поверхность вращения кривой $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, $x \in [-R, R]$, вокруг оси Ox. Согласно выведенной формуле имеем

$$S = 2\pi \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}\right)^2}dx = 2\pi \int_{-R}^{R} R\,dx = 4\pi R^2.$$

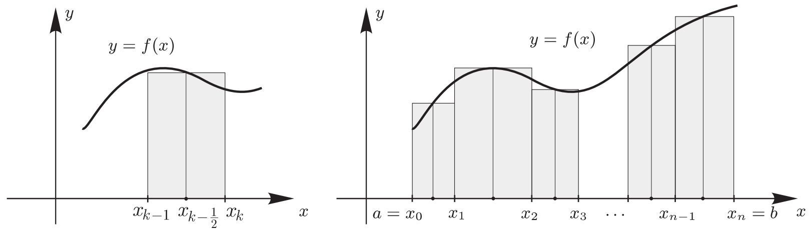
Приближенное вычисление определенного интеграла..

1) *Формула прямоугольников.* Разобьем отрезок интегрирования точками $a = x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n = b$ на равные части длины $h = (b - a)/n$. Положим $x_{k-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(x_{k-1} + x_k)$ и

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx \approx f(x_{k-\frac{1}{2}})h. \tag{9.4}$$

Эту формулу называют *элементарной формулой прямоугольников*. Из нее получается составная *формула прямоугольников*

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \approx h \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-\frac{1}{2}}).} \tag{9.5}$$



Оценим погрешность формулы (9.4), считая, что $x_{k-1} = -h/2$ и $x_k = h/2$; тогда $x_{k-\frac{1}{2}} = 0$. Пусть $f(x) \in C^2[-h/2, h/2]$, тогда по формуле Тейлора

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(c)x^2,$$

где $c = c(x)$ лежит между точками 0 и x (на отрезке $[-h/2, h/2]$). Отсюда

$$\int_{-h/2}^{h/2} f(x)\,dx = \int_{-h/2}^{h/2} f(0)\,dx + \int_{-h/2}^{h/2} f'(0)x\,dx + \frac{1}{2}\int_{-h/2}^{h/2} f''(c(x))x^2\,dx.$$

В итоге имеем

$$\int_{-h/2}^{h/2} f(x)\,dx - f(0)h = \frac{1}{2}\int_{-h/2}^{h/2} f''(c(x))x^2\,dx.$$

Предположим, что на $[-h/2, h/2]$ справедлива оценка $|f''(x)| \leqslant M_2$, тогда

$$\left|\int_{-h/2}^{h/2} f(x)\,dx - f(0)h\right| \leqslant \frac{1}{2}\int_{-h/2}^{h/2} M_2x^2\,dx = \frac{h^3}{24}\,M_2.$$

Для оценки погрешности формулы (9.5) положим $M_2 = \max\limits_{x\in[a,b]} |f''(x)|$. Пользуясь формулой (9.4), получим

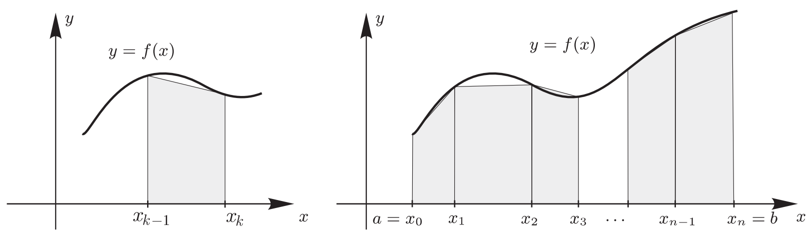
$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)\,dx - h\sum_{k=1}^n f(x_{k-\frac{1}{2}})\right| &= \left|\sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx - h\sum_{k=1}^n f(x_{k-\frac{1}{2}})\right| \\ &\leqslant \sum_{k=1}^n\left|\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx - hf(x_{k-\frac{1}{2}})\right| \leqslant \sum_{k=1}^n \frac{h^3}{24}\,M_2 = n\,\frac{h^3}{24}\,M_2 = \frac{b-a}{24}\,h^2M_2.\end{aligned}$$

2) *Формула трапеций*. Элементарная формула трапеций выглядит так:

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx = \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2}\,h.$$

Составная формула трапеций получается из приведенной выше формулы:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h\sum_{k=1}^n \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} = h\biggl(\frac{1}{2}\,f(x_0) + f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1}) + \frac{1}{2}\,f(x_n)\biggr).$$



Несмотря на то, что визуально ломаная, площадь под графиком которой совпадает с правой частью формулы трапеций, больше «похожа» на график функции $y = f(x)$, чем кусочно постоянная функция для метода прямоугольников, оценка погрешности этой формулы трапеций хуже, чем оценка погрешности формулы прямоугольников: погрешность оценивается величиной $\frac{b-a}{12}h^2M_2$ (мы не будем останавливаться на доказательстве этой оценки).

3) *Формула Симпсона*. Элементарная формула Симпсона выглядит так:

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx \approx \biggl(\frac{1}{6}\,f(x_{k-1}) + \frac{2}{3}\,f(x_{k-\frac{1}{2}}) + \frac{1}{6}\,f(x_k)\biggr)h.$$

Выпишем составную формулу Симпсона:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx = \biggl(&\frac{1}{6}\,f(x_0) + \frac{2}{3}\,f(x_{\frac{1}{2}}) + \frac{1}{3}\,f(x_1) + \frac{2}{3}\,f(x_{1+\frac{1}{2}}) + \ldots \\ &+ \frac{1}{3}\,f(x_{n-1-\frac{1}{2}}) + \frac{2}{3}\,f(x_{n-1}) + \frac{1}{3}\,f(x_{n-\frac{1}{2}}) + \frac{1}{6}\,f(x_n)\biggr)h \\ = \biggl(&\frac{1}{6}\,f(x_0) + \frac{2}{3}\sum_{k=1}^n f(x_{k-\frac{1}{2}}) + \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + \frac{1}{6}\,f(x_n)\biggr)h.\end{aligned}$$

Погрешность этой формулы оценивается величиной

$$\frac{M_4}{2880}\,h^4(b-a), \quad \text{где } M_4 = \max_{x\in[a;b]} f^{(4)}(x).$$

Доказывать эту формулу мы не будем.

Лекция 10

§ 9. Несобственные интегралы

Определение. Примеры.

Пример. 1. Рассмотрим интеграл $\int_0^\xi \frac{dx}{1+x^2}$. Как ведет себя этот интеграл, если $\xi \to +\infty$? Вот ответ:

$$\int_0^\xi \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x\Big|_0^\xi = \operatorname{arctg}\xi \to \frac{\pi}{2} \quad \text{при } \xi \to +\infty.$$

2. Рассмотрим интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$. Функция не интегрируема на $[0,1]$, так как:
а) не определена в точке $x=0$ (это полбеды);
б) не ограничена в окрестности точки $x=1$.

Вместо интеграла $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ рассмотрим интегралы $\int_0^\xi \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$, где $\xi<1$. Функция $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ непрерывна на $[1,\xi]$ и поэтому интегрируема на этом отрезке, причем

$$\int_0^\xi \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = -2\sqrt{1-x}\Big|_0^\xi = 2-2\sqrt{1-\xi} \to 2 \quad \text{при } \xi \to 1-0.$$

Эти примеры показывают, что можно придать разумный смысл интегралам типа

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}, \qquad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}.$$

Определение 10.1. Пусть функция $f(x)$ задана на $[a,+\infty)$ и интегрируема на любом отрезке $[a,\xi]$, $\xi>a$. Запись

$$\int_a^\infty f(x)\,dx$$

называют *несобственным интегралом первого рода* от $f(x)$ на промежутке $[a,+\infty)$. Говорят, что он сходится, если существует конечный предел

$$J = \lim_{\xi\to+\infty}\int_a^\xi f(x)\,dx.$$

В этом случае пишут

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = J.$$

Если предел $\lim\limits_{\xi\to+\infty}\int_a^\xi f(x)dx$ не существует или бесконечен, то говорят, что интеграл $\int_a^\infty f(x)\,dx$ расходится.

Определение 10.2. Пусть функция $f(x)$ задана на $[a,b)$ и интегрируема на любом отрезке $[a,\xi]$, $\xi\in[a,b)$. В этом случае запись

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

называют *несобственным интегралом второго рода* от $f(x)$ на $[a,b)$. Говорят, что он сходится, если существует конечный предел

$$J = \lim_{\xi\to b-0}\int_a^\xi f(x)\,dx.$$

В этом случае пишут: $J = \int_a^b f(x)\,dx$

Если предел $\lim\limits_{\xi\to b-0}\int_a^\xi f(x)\,dx$ не существует, то говорят, что несобственный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ расходится. Точка b называется особой точкой для интеграла второго рода.

Примеры. 1) Несобственный интеграл $\int_1^\infty \frac{dx}{x}$ расходится, так как

$$\int_1^\xi \frac{dx}{x} = \ln\xi \to +\infty \quad \text{при } \xi\to+\infty.$$

2) Интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ сходится, и равен 2. Это несобственный интеграл второго рода.

3) Интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{x-1}$ расходится, так как

$$\int_0^{\xi} \frac{dx}{x-1} = \ln(1-\xi) \to -\infty \quad \text{при } \xi \to 1-0.$$

Замечание. Разумеется можно и нужно определить несобственные интегралы первого рода по $(-\infty, a]$ и несобственные интегралы второго рода по $(a, b]$, где a — особая точка.

Пример. 1) Рассмотрим несобственный интеграл первого рода $\int_{-\infty}^{0} xe^{-x^2}dx$. Имеем

$$\int_{\xi}^{0} xe^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}\int_{\xi}^{0} xe^{-x^2}d(-x^2) = -\frac{1}{2}\,e^{-x^2}\Big|_{\xi}^{0} = \frac{e^{-\xi^2}}{2} - \frac{1}{2} \to -\frac{1}{2} \quad \text{при } \xi \to \infty.$$

Поэтому интеграл сходится и его значение равно $-1/2$:

$$\int_{-\infty}^{0} xe^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}.$$

2) Рассмотрим несобственный интеграл второго рода $\int_0^1 \frac{dx}{x}$; здесь 0 — особая точка. Имеем

$$\int_{\xi}^{1} \frac{dx}{x} = -\ln\xi \to +\infty \quad \text{при } \xi \to 0+0.$$

Следовательно, интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{x}$ расходится.

Замечание. Если $f(x)$ определена на числовой оси $\mathbb{R}$ и интегрируема на любом отрезке $[a, b] \in (-\infty; +\infty)$, то можно определить несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$. Такой интеграл по определению сходится, если сходятся два интеграла $\int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx$ и $\int_{c}^{\infty} f(x)\,dx$, где c — любое число. При этом

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{\infty} f(x)\,dx.$$

Упражнение. Проверить, что ответ не зависит от c (при помощи аддитивности).

Пример. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{0}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$; здесь оба интеграла сходятся, следовательно сходится и исходный интеграл.

Замечание. Можно определить несобственные интегралы в случае если a и b — особые точки. Тогда $\int_a^b f(x)\,dx$ сходится по определению в том и только том случае, когда сходятся интегралы $\int_a^c f(x)\,dx$ и $\int_c^b f(x)\,dx$.

Более того, можно рассматривать интеграл второго рода с особой точкой c внутри $[a, b]$. Такой интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ сходится по определению в том и только том случае, когда сходятся оба интеграла $\int_a^c f(x)\,dx$ и $\int_c^b f(x)\,dx$.

Примеры. 1) $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ — несобственный интеграл второго рода с особыми точками 1 и -1.

Рассмотрим интегралы $\int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ и $\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Имеем

$$\int_0^{\xi} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin\xi \to \frac{\pi}{2} \qquad \text{при } \xi \to 1-0,$$

$$\int_{\xi}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(-\xi) \to \frac{\pi}{2} \quad \text{при } \xi \to -1+0.$$

Поэтому интеграл $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ сходится и равен π.

2) Несобственный интеграл $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^2}$ — имеет «особые точки» 0 и $+\infty$. Для исследования на сходимость нужно рассмотреть два интеграла $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$ и $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$. Первый из этих интегралов расходится:

$$\int_\xi^1 \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\bigg|_\xi^1 = \frac{1}{\xi} - 1 \to +\infty \quad \text{при } \xi \to 0+0.$$

Поэтому расходится и исходный интеграл.

Несобственные интегралы от неотрицательных функций.

Теорема 10.3. *Пусть неотрицательная функция $f(x)$ интегрируема на любом отрезке промежутка $[a,b)$ ($b \leqslant +\infty$). Тогда интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ сходится в том и только том случае, когда интегралы $\int_a^\xi f(x)\,dx$, $a<\xi<b$, ограничены в совокупности, т. е. существует такая постоянная C, что*

$$\int_a^\xi f(x)\,dx \leqslant C \quad \textit{для любого } \xi \in [a,b).$$

Доказательство. ($\Longrightarrow$) Рассмотрим функцию $F(\xi) = \int_a^\xi f(x)\,dx$. По определению несобственного интеграла $\lim\limits_{\xi\to b-0} F(\xi) = J$. Кроме того, $F(\xi)$ не убывает:

$$F(\xi_2) - F(\xi_1) = \int_{\xi_1}^{\xi_2} f(x)\,dx \geqslant 0 \quad \text{при } \xi_2 > \xi_1.$$

Отсюда имеем оценку $F(\xi) \leqslant J$.

($\Longleftarrow$) Пусть $F(\xi) \leqslant C$ для любого $\xi \in [a,b)$. Функция $F(\xi)$ не убывает на $[a,b)$ (см выше) и ограничена сверху. Поэтому $F(\xi)$ имеет конечный предел при $\xi \to b-0$, т. е. интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ сходится. □

Теорема 10.4 (первая теорема сравнения). *Пусть $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ на $[a,b)$ и $f(x)$, $g(x)$ интегрируемы на любом отрезке $[a,\xi] \subset [a,b)$. Тогда*

а) *если $\int_a^b g(x)\,dx$ сходится, то и $\int_a^b f(x)\,dx$ сходится*;

б) *если $\int_a^b f(x)\,dx$ расходится, то $\int_a^b g(x)\,dx$ тоже расходится.*

Доказательство. а) Если интеграл $\int_a^b g(x)\,dx$ сходится, то по теореме 10.3 существует постоянная C, такая, что $\int_a^\xi g(x)\,dx \leqslant C$ для любого $\xi \in [a,b)$. Но тогда и $\int_a^\xi f(x)\,dx \leqslant C$ для любого $\xi \in [a,b)$. Применяя вновь теорему 10.3, получаем, что интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ сходится.

б) вытекает из а), так как если бы $\int_a^b g(x)\,dx$ сходился, то в силу утверждения а) сходился бы и интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$. □

Пример 10.5. Исследуем на сходимость интеграл $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\cos^4 3x}{\sqrt[3]{1+x^6}}\,dx$. Имеем $0 \leqslant \dfrac{\cos^4 3x}{\sqrt[3]{1+x^6}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^6}} = \dfrac{1}{x^2}$; интеграл $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ сходится:

$$\int_1^\xi \frac{1}{x^2}\,dx = 1 - \frac{1}{\xi} \to 1 \quad \text{при } \xi \to +\infty.$$

Следовательно, сходится и исходный интеграл.

Лекция 11

Сделаем несколько замечаний.

Замечание 11.1. Несобственные интегралы $\int_{a_1}^b f(x)\,dx$ и $\int_{a_2}^b f(x)\,dx$ (здесь $b=\infty$ или является особой точкой) сходятся или расходятся одновременно. Это означает, что если сходится один из интегралов, то сходится и другой.

Действительно, в силу свойства обобщенной аддитивности имеем

$$\int_{a_1}^\xi f(x)\,dx = \int_{a_1}^{a_2} f(x)\,dx + \int_{a_2}^\xi f(x)\,dx$$

или

$$\int_{a_1}^\xi f(x)\,dx = C + \int_{a_2}^\xi f(x)\,dx.$$

Их этой формулы видно, что если существует $\lim\limits_{\xi\to b-0}\int_a^b f(x)\,dx$, то существует $\lim\limits_{\xi\to b-0}\int_a^b f(x)\,dx$ и наоборот.

Замечание 11.2. Заметим, что сходимость несобственного интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ по определению *эквивалентна существованию конечного предела при $\xi \to b-0$ функции*

$$F(\xi) = \int_a^\xi f(x)\,dx.$$

(Напомним, что если $f(x)$ непрерывна на $[a,b)$, то функция $F(x)$ является первообразной для $f(x)$, т.е. $F'(x) = f(x)$.)

В частности, пользуясь этим, из свойства линейности операции перехода к пределу легко получить следующее

Предложение 11.3 (свойство линейности). *Пусть функции $f(x)$, $g(x)$ таковы, что несобственные интегралы $\int_a^b f(x)\,dx$, $\int_a^b g(x)\,dx$ сходятся. Тогда для любых α, β также сходится и интеграл $\int_a^b(\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx$, причем*

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx.$$

Из этого предложения, например, вытекает, что если $\int_a^b f(x)\,dx$ сходится, а $\int_a^b g(x)\,dx$ расходится, то $\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx$ также расходится. (Он не может сходиться, так как $g(x) = (f(x) + g(x)) - f(x)$.)

Из критерия Коши существования конечного предела для функций[3] вытекает

Теорема 11.4 (критерий Коши сходимости несобственного интеграла). *Пусть функция $f(x)$ интегрируема на любом отрезке $[a,\xi]$ промежутка $[a,b)$. Несобственный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ сходится тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует ξ_0, такое, что при всех $\xi_1, \xi_2 \geqslant \xi$ справедлива оценка*

$$\left| \int_{\xi_1}^{\xi_2} f(x)\,dx \right| \leqslant \varepsilon.$$

Эта теорема часто бывает полезной, но мы не будем ей пользоваться (хотя бы потому, что она является следствием результата, доказательство которого отсутствует в лекциях).

Теорема 11.5 (вторая теорема сравнения). *Пусть функции $f(x)$, $g(x)$ неотрицательны на $[a,b)$ и интегрируемы на любом отрезке $[a,\xi] \subset [a,b)$ и $f(x) \sim g(x)$ при $x \to b-0$. Тогда интегралы $\int_a^b f(x)\,dx$ и $\int_a^b g(x)\,dx$ сходятся или расходятся одновременно* (*т. е. если сходится один интеграл, то сходится и другой*).

Доказательство. Пусть один из интегралов, например $\int_a^b g(x)\,dx$, сходится. По определению эквивалентных при $x \to b$ функций имеем $f(x) = g(x)u(x)$, где $u(x) \to 1$ при $x \to b$; поэтому существует такое x_0, что при $x \geqslant x_0$ справедливо неравенство $u(x) \leqslant \frac{3}{2}$. Это означает, что

$$f(x) \leqslant \tfrac{3}{2} g(x) \quad \text{при } x_0 \leqslant x < b.$$

Далее, интеграл $\int_{x_0}^b \frac{3}{2} g(x)\,dx = \frac{3}{2}\int_{x_0}^b g(x)\,dx$ сходится (см. замечание 11.1), следовательно по первой теореме сравнения сходится и интеграл $\int_{x_0}^b f(x)\,dx$. В силу замечания 11.1 также сходится и интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$. $\square$

Ясно, что если один из интегралов расходится, то расходится и другой.

Пример. Исследуем на сходимость $\int_1^\infty \frac{\ln(e^x - x)}{x^3}\,dx$.

При $x \to +\infty$

$$\frac{\ln(e^x - x)}{x^3} = \frac{\ln(e^x(1 - xe^{-x}))}{x^3} = \frac{x + \ln(1 - xe^{-x})}{x^3} \sim \frac{1}{x^2}.$$

Интеграл $\int_2^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ сходится (см. пример 10.5). Поэтому в силу второй теоремы сравнения сходится и исходный интеграл.

Наличие теорем сравнения побуждает нас всегда иметь под рукой некоторый стандартный набор несобственных интегралов, свойства которых заранее известны. Предъявим такие несобственные интегралы.

Важный пример 11.6. Исследуем на сходимость интегралы

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} \quad \text{и} \quad \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}.$$

Если $\alpha = 1$, то

$$\int_1^\xi \frac{dx}{x} = \ln x\big|_1^\xi = \ln\xi \to +\infty \quad \text{при } \xi \to +\infty.$$

Следовательно, при $\alpha = 1$ интеграл $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ расходится.

[3] Напомним его формулировку: *Функция $F(x)$ имеет конечный предел при $x \to b$ тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое, что при всех $\xi_1, \xi_2 \in O_\delta(b)$ справедливо неравенство $|F(\xi_1) - F(\xi_2)| < \varepsilon$.*

Если $\alpha \neq 1$, то при $\xi \to +\infty$ имеем

$$\int_1^{\xi} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_1^{\xi} = \frac{\xi^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \to \begin{cases} +\infty, & \text{если } \alpha < 1, \\ (\alpha-1)^{-1}, & \text{если } \alpha > 1. \end{cases}$$

Окончательный итог следует также следует зазубрить:

$$\boxed{\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \quad \begin{matrix} \text{сходится,} & \text{если } \alpha > 1, \\ \text{расходится,} & \text{если } \alpha \leqslant 1. \end{matrix}}$$

Если $\alpha = 1$, то

$$\int_{\xi}^{1} \frac{dx}{x} = \ln x\Big|_{\xi}^{1} = -\ln \xi \to +\infty \quad \text{при } \xi \to +0.$$

Следовательно, при $\alpha = 1$ интеграл $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ расходится.

Если $\alpha \neq 1$, то при $\xi \to +0$ имеем

$$\int_{\xi}^{1} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_{\xi}^{0} = \frac{1}{1-\alpha} - \frac{\xi^{1-\alpha}}{1-\alpha} \to \begin{cases} +\infty, & \text{если } \alpha > 1, \\ (1-\alpha)^{-1}, & \text{если } \alpha < 1. \end{cases}$$

Окончательный итог следует зазубрить:

$$\boxed{\int_0^{1} \frac{dx}{x^\alpha} \quad \begin{matrix} \text{сходится,} & \text{если } \alpha < 1, \\ \text{расходится,} & \text{если } \alpha \geqslant 1. \end{matrix}}$$

Пример. Интеграл $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$. Расходится при любом α, поскольку при $\alpha > 1$ расходится интеграл $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{x^\alpha}$, а при $\alpha < 1$ расходится интеграл $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ (при $\alpha = 1$ расходятся оба интеграла).

Пример 11.6. Исследуем на сходимость несобственный интеграл

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha \ln^\beta x}. \tag{11.1}$$

Здесь множитель $\ln^\beta x$ настолько «слаб», что не в состоянии повлиять на полученный в примере 11.6 результат при $\alpha \neq 1$. Действительно, если $\alpha = 1$

Пусть $\alpha > 1$. Введем обозначение $\delta = (\alpha - 1)/2$. Тогда $\alpha = 1 + 2\delta$, где $\delta > 0$, и

$$\frac{1}{x^\alpha \ln^\beta x} = \frac{1}{x^{1+\delta} x^\delta \ln^\beta x}$$

Здесь $x^\delta \ln^\beta x \to +\infty$ при $x \to +\infty$ (см. 1-й семестр); поэтому при достаточно больших x имеем $\dfrac{1}{x^\delta \ln^\beta x} \leqslant 1$. Таким образом, при $x \geqslant x_0$ справедлива оценка

$$\frac{1}{x^\alpha \ln^\beta x} \leqslant \frac{1}{x^{1+\delta}}.$$

Из этой оценки, примера 11.5 и первой теоремы сравнения вытекает, что интеграл (11.1) сходится.

Пусть $\alpha < 1$. Введем обозначение $\delta = (1 - \alpha)/2$. Тогда $\alpha = 1 - 2\delta$, где $\delta > 0$, и

$$\frac{1}{x^\alpha \ln^\beta x} = \frac{1}{x^{1-\delta} x^{-\delta} \ln^\beta x}$$

Здесь $x^{-\delta} \ln^\beta x \to 0$ при $x \to +\infty$ (см. 1-й семестр); поэтому при достаточно больших x имеем $\dfrac{1}{x^{-\delta} \ln^\beta x} \geqslant 1$. Таким образом, при $x \geqslant x_0$ справедлива оценка

$$\frac{1}{x^\alpha \ln^\beta x} \geqslant \frac{1}{x^{1-\delta}}.$$

Из этой оценки, примера 11.5 и первой теоремы сравнения вытекает, что интеграл (11.1) расходится.

Наконец, если $\alpha = 1$, то интеграл имеет вид $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln^\beta x}$. Такой интеграл сводится к интегралу из примера 11.5 заменой $x = \ln t$. Действительно,

$$\int_2^{\xi} \frac{dx}{x \ln^\beta x} = \int_2^{\xi} \frac{d \ln x}{\ln^\beta x} = \int_{\ln 2}^{\ln \xi} \frac{dt}{t^\beta}.$$

Здесь $\ln\xi \to +\infty$ при $\xi \to +\infty$. Поэтому существование конечного предела интеграла $\int_{\ln 2}^{\ln\xi}$ при $\xi \to +\infty$ равносильно сходимости интеграла $\displaystyle\int_{\ln 2}^{\infty} \frac{dt}{t^\beta}$. А он сходится при $\beta > 1$ а расходится при $\beta \leqslant 1$.

Подводим итог:

$$\boxed{\int_2^\infty \frac{dx}{x^\alpha \ln^\beta x} \quad \begin{array}{ll} \text{сходится,} & \text{если } \alpha > 1 \text{ или } \alpha = 1, \text{ но } \beta > 1. \\ \text{расходится,} & \text{если } \alpha < 1 \text{ или } \alpha = 1, \text{ но } \beta \leqslant 1. \end{array}}$$

По аналогии можно также исследовать интеграл $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{dx}{x^\alpha \ln^\beta x}$, но мы этим не будем заниматься.

9.3. Абсолютная и условная сходимость несобственных интегралов.

Определение 11.7. Несобственный интеграл $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится интеграл $\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,dx$.

Несобственный интеграл $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ называется *условно сходящимся*, если он сходится, но не является абсолютно сходящимся (т.е., интеграл $\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,dx$ расходится).

Пример. Интеграл $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^2}\,dx$ является абсолютно сходящимся.

Действительно,

$$\left|\frac{\sin x}{x^2}\right| \leqslant \frac{1}{x^2};$$

поэтому по 1-й теореме сравнения интеграл $\displaystyle\int_1^\infty \left|\frac{\sin x}{x^2}\right| dx$ также сходится.

Теорема 11.8 (о сходимости абсолютно сходящегося интеграла). *Если несобственный интеграл сходится абсолютно, то он сходится. Иными словами, если сходится интеграл* $\int_a^b |f(x)|\,dx$, *то сходится и интеграл* $\int_a^b f(x)\,dx$.

Доказательство. Рассмотрим функции

$$f_+(x) = \frac{|f(x)| + f(x)}{2} \quad \text{и} \quad f_-(x) = \frac{|f(x)| - f(x)}{2}$$

Нетрудно видеть, что $f(x) = f_+(x) - f_-(x)$. Кроме того,

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } f(x) \geqslant 0, \\ 0, & \text{если } f(x) < 0, \end{cases} \qquad f_-(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } f(x) \geqslant 0, \\ |f(x)|, & \text{если } f(x) < 0. \end{cases}$$

Поэтому $0 \leqslant f_-(x) \leqslant |f(x)|$ и $0 \leqslant f_+(x) \leqslant |f(x)|$. Из этих неравенств и первой теоремы сравнения получаем, что несобственные интегралы $\displaystyle\int_a^b f_+(x)\,dx$ и $\displaystyle\int_a^b f_-(x)\,dx$, а следовательно сходится и интеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f_+(x)\,dx - \int_a^b f_-(x)\,dx. \quad \square$$

Лекция 12

Пример 12.1. Исследуем на абсолютную и условную сходимость несобственный интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx. \tag{12.1}$$

Покажем сначала, что при $\alpha > 0$ и любом $\omega \neq 0$ несобственные интегралы

$$\int_1^\infty \frac{\sin \omega x}{x^\alpha}\,dx \quad \text{и} \quad \int_1^\infty \frac{\cos \omega x}{x^\alpha}\,dx \tag{12.2}$$

сходятся. Для определенности рассмотрим второй интеграл. Воспользуемся интегрированием по частям:

$$\int_1^\xi \frac{\cos \omega x}{x^\alpha}\,dx = \frac{\sin \omega x}{\omega}\frac{1}{x^\alpha}\bigg|_1^\xi + \frac{\alpha}{\omega}\int_1^\xi \frac{\sin \omega x}{x^{\alpha+1}}\,dx.$$

Здесь первое слагаемое справа имеет конечный предел:

$$\frac{\sin\omega x}{\omega}\frac{1}{x^\alpha}\bigg|_1^\xi = \frac{\sin\omega\xi}{\omega}\frac{1}{\xi^\alpha} - \frac{\sin\omega}{\omega} \to -\frac{\sin\omega}{\omega} \quad \text{при } \xi\to\infty.$$

Второе слагаемое справа также имеет конечный предел, поскольку интеграл $\displaystyle\int_1^\xi \frac{\sin\omega x}{x^{\alpha+1}}\,dx$ сходится абсолютно: $\displaystyle\left|\frac{\sin\omega x}{x^{\alpha+1}}\right| \leqslant \frac{1}{x^{\alpha+1}}$.

Теперь вернемся к интегралу (12.1).

При $\alpha > 1$ интеграл (12.1) сходится абсолютно, поскольку $\displaystyle\left|\frac{\sin x}{x^\alpha}\right| \leqslant \frac{1}{x^\alpha}$.

При $0 < \alpha \leqslant 1$ интеграл (12.1) не является абсолютно сходящимся. В самом деле,

$$\left|\frac{\sin x}{x^\alpha}\right| \geqslant \frac{\sin^2 x}{x^\alpha},$$

а интеграл $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x^\alpha}\,dx$ расходится, поскольку

$$\int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x^\alpha}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx - \frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{\cos 2x}{x^\alpha}\,dx,$$

причем первый интеграл справа расходится ($\alpha < 1$), а второй — сходится (см. начало примера).

Итак, при $0 < \alpha \leqslant 1$ интеграл (12.1) сходится условно.

Покажем, что при $\alpha \leqslant 0$ интеграл (12.1) расходится.

В самом деле, при $\alpha \leqslant 0$ имеем

$$\int_{2\pi n}^{2\pi n+\pi} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx \geqslant \int_{2\pi n}^{2\pi n+\pi} \sin x\,dx = 2. \tag{12.3}$$

Если интеграл (12.1) сходится, т.е. существует предел

$$\lim_{\xi\to\infty}\int_1^\xi \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx = J,$$

то

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_{2\pi n}^{2\pi n+\pi} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx &= \lim_{n\to\infty}\left(\int_1^{2\pi n+\pi} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx - \int_1^{2\pi n} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx\right)\\ &= J - J = 0,\end{aligned}$$

что противоречит оценке (12.3).

Подведем итог:

$$\text{интеграл } \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx \quad \begin{array}{l}\text{сходится абсолютно при } \alpha > 1,\\ \text{сходится условно при } 0 < \alpha \leqslant 1,\\ \text{расходится при } \alpha \leqslant 0.\end{array}$$

Нетрудно показать, что такой же результат справедлив для интегралов (12.2).

Замечание 12.2. Отметим, что при помощи замены переменной всегда можно свести исследование несобственного интеграла первого рода к исследованию несобственного интеграла второго рода и наоборот. Например, замена $x = 1/t$ сводит интеграл $\displaystyle\int_1^\infty f(x)\,dx$ к интегралу $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(1/t)}{t^2}\,dt$. В самом деле,

$$\int_1^\xi f(x)\,dx = -\int_1^{1/\xi} \frac{f(1/t)}{t^2}\,dt = \int_{1/\xi}^1 \frac{f(1/t)}{t^2}\,dt;$$

поэтому интегралы

$$\int_1^\infty f(x)\,dx \quad \text{и} \quad \int_0^1 \frac{f(x)}{x^2}\,dx$$

сходятся или расходятся одновременно и если сходятся, то совпадают.

Пример 12.3. Пример 12.1 после замены $x \mapsto 1/x$ дает следующий результат:

$$\text{интеграл } \int_0^1 x^{\alpha-2}\sin\frac{1}{x}\,dx \quad \begin{array}{l}\text{сходится абсолютно при } \alpha > 1,\\ \text{сходится условно при } 0 < \alpha \leqslant 1,\\ \text{расходится при } \alpha \leqslant 0.\end{array}$$

Заметим, что при $\alpha \geqslant 0$ этот интеграл по существу не является несобственным (подынтегральная функция ограничена). Кроме того, у нас появился чрезвычайно полезный (для успешной сдачи коллоквиума и/или экзамена) пример условно сходящегося несобственного интеграла первого рода:

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}\,dx.$$

Теорема 12.4 (признак Дирихле). *Пусть*

1) *функция $f(x)$ непрерывна, а ее первообразная $F(x)$ ограничена на $[a,+\infty)$, т.е. существует такое M, что $|F(x)| \leqslant M$,*

2) *неотрицательная функция $g(x)$ непрерывно дифференцируема на $[a,+\infty)$, $g'(x) \leqslant 0$, и $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$.*

Тогда несобственный интеграл $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$ сходится.

Обращаю внимание на распространенную ошибку при формулировке теоремы Дирихле. Условие ограниченности накладывается не на саму функцию, а на ее первообразную. Это «две большие разницы» (например, любая функция вида $f(x) = C + \cos x$ ограничена, но лишь при $C = 0$ такая функция имеет ограниченную первообразную). Как правило, здесь $f(x)$ — осциллирующая функция типа $\cos\omega x$ или $\sin\omega x$, а $g(x)$ — убывающая «амплитуда».

Доказательство теоремы 12.4. Вместо первообразной $F(x)$ нам удобнее будет пользоваться первообразной $F_1(x) = F(x) + M$. При этом из оценки $|F(x)| \leqslant M$ вытекает неравенство $0 \leqslant F_1(x) \leqslant 2M$.

Воспользуемся интегрированием по частям:

$$\int_a^\xi f(x)g(x)\,dx = F_1(x)g(x)\Big|_a^\xi + \int_a^\xi F_1(x)(-g'(x))\,dx$$

Здесь при $\xi \to +\infty$

$$F_1(x)g(x)\Big|_a^\xi = F_1(\xi)g(\xi) - F_1(a)g(a) \to -F_1(a)g(a)$$

(напомним, что $F_1(\xi)$ ограничена и $g(\xi) \to 0$ при $\xi \to +\infty$), а слагаемое $\int_a^\xi F_1(x)(-g'(x))\,dx$ также имеет конечный предел, поскольку несобственный интеграл $\int_a^\infty F_1(x)(-g'(x))\,dx$ сходится. Последнее утверждение проверяется при помощи первой теоремы сравнения: имеем

$$0 \leqslant F_1(x)(-g'(x)) \leqslant 2M(-g'(x)),$$

а интеграл $\int_a^\infty 2M(-g'(x))\,dx = 2M\int_a^\infty(-g'(x))\,dx$ сходится, так как

$$\int_a^\xi (-g'(x))\,dx = -g(x)\Big|_a^\xi = g(a) - g(\xi) \to g(a) \quad \text{при } \xi \to +\infty. \quad \square$$

Пример. Исследуем на сходимость интеграл $\int_0^\infty x\cos e^x dx$.

Замена $e^x = t$, $x = \ln t$ позволяет свести исследование этого интеграла к исследованию интеграла

$$\int_0^\infty x\cos e^x dx = \int_1^\infty \ln t\cos t\,\frac{dt}{t} = \int_1^\infty \underbrace{\frac{\ln t}{t}}_{g(t)}\underbrace{\cos t}_{f(t)}\,dt.$$

Здесь функция $f(t) = \cos t$ имеет ограниченную первообразную, а функция $g(t) \geqslant 0$ стремится к 0 при $t \to +\infty$ и

$$\left(\frac{\ln t}{t}\right)' = \frac{1-\ln t}{t^2} \leqslant 0 \quad \text{при } t \geqslant e.$$

По признаку Дирихле интеграл сходится. Но абсолютной сходимости нет, так как

$$\int_0^\infty |x\cos e^x|\,dx = \int_1^\infty \frac{\ln t}{t}|\cos t|\,dt, \qquad \frac{\ln t}{t}|\cos t| \geqslant \frac{|\cos t|}{t} \quad (t \geqslant e),$$

а интеграл $\displaystyle\int_1^\infty \frac{|\cos t|}{t}\,dt$ расходится (см. пример 11.5).

В заключение приведем следующий поучительный

Пример 12.5. Исследуем на абсолютную и условную сходимость несобственный интеграл

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}-\sin x}\,dx.$$

Ясно, что $\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}-\sin x} \sim \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$ при $x \to +\infty$, но вторую теорему сравнения применить нельзя (функции не являются знакопостоянными). Признак Дирихле также не сработает, если мы попытаемся его применить к паре функций $f(x) = \sin x$, $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}-\sin x}$ (последняя не удовлетворяет условию $g'(x) \leqslant 0$).

Воспользуемся асимптотической формулой $(1-\alpha)^{-1} = 1 + \alpha + O(\alpha^2)$, $\alpha \to 0$, и представим функцию $\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}-\sin x}$ в следующем виде:

$$\frac{\sin x}{\sqrt{x}-\sin x} = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\left(1-\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right)^{-1} = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\left(1+\frac{\sin x}{\sqrt{x}}+O\left(\frac{\sin^2 x}{x}\right)\right) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + \frac{\sin^2 x}{x} + O\left(\frac{\sin^3 x}{x^{3/2}}\right).$$

Трем слагаемым справа отвечают три несобственных интеграла.

Интеграл $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx$ сходится (по признаку Дирихле).

Интеграл $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x}\,dx$ расходится (см. пример 11.5).

Наконец, интеграл $\displaystyle\int_1^\infty O\left(\frac{\sin^3 x}{x^{3/2}}\right)dx$ сходится (абсолютно), поскольку по определению O-большого

$$\left|O\left(\frac{\sin^3 x}{x^{3/2}}\right)\right| \leqslant C\left|\frac{\sin^3 x}{x^{3/2}}\right| \leqslant \frac{C}{x^{3/2}}.$$

Итак, интеграл $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}-\sin x}\,dx$ равен сумме двух сходящихся интегралов и одного расходящегося, следовательно исходный интеграл расходится.

Внимание, если интеграл равен сумме двух расходящихся интегралов, то ничего определенного о его сходимости сказать нельзя: этот интеграл может и сходиться, например

$$\underbrace{\int_1^\infty 0\,dx}_{\text{сх.}} = \underbrace{\int_1^\infty \frac{dx}{x}}_{\text{расх.}} + \underbrace{\int_1^\infty \frac{-1}{x}\,dx}_{\text{расх.}}.$$

Лекция 13

§10. Числовые ряды

Определение и примеры.

Определение 10.1. Числовым рядом называется формальная запись

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots. \tag{13.1}$$

N-й частичной суммой ряда (13.1) называется число

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n = a_1 + \dots + a_N. \tag{13.2}$$

Если последовательность частичных сумм S_N имеет конечный предел при $N \to \infty$, то ряд (13.1) называется *сходящимся*, а число $S = \lim\limits_{N\to\infty} S_N$ называется суммой ряда (13.1). В этом случае пишут

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S.$$

Если последовательность частичных сумм S_N не имеет конечного предела, то ряд (13.1) называется *расходящимся*.

Примеры 13.2. а) Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$.

Частичные суммы легко вычисляются, если сообразить, что

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

и записать

$$S_N = \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{N+1}\right) = 1 - \frac{1}{N+1}.$$

Видно, что $S_N \to 1$ при $N \to \infty$; поэтому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$ сходится и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

б) Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$.

Нетрудно заметить, что $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, а

$$S_N = \sum_{n=1}^{N}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = (\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \dots + (\sqrt{N+1} - \sqrt{N}) = \sqrt{N+1} - 1.$$

Поэтому последовательность частичных сумм $S_N = \sqrt{N+1} - 1$ стремится к $+\infty$. Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ расходится.

Теорема 13.3 (необходимый признак сходимости). *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится, то последовательность* a_n *стремится к* 0.

Доказательство. По определению частичной суммы имеем $S_N = a_1 + \dots + a_{N-1} + a_N = S_{N-1} + a_N$. Кроме того, по условию теоремы, S_N (а, следовательно, и S_{N-1}) имеет конечный предел S. Поэтому

$$\lim_{N\to\infty} a_N = \lim_{N\to\infty}(S_N - S_{N-1}) = S - S = 0. \quad \square$$

Теорема 13.3 фактически является достаточным признаком расходимости. При помощи этой теоремы нельзя обосновать сходимость ряда. Кроме того, нетрудно видеть, что утверждение, обратное к этой теореме, неверно. Действительно, ряд из примера 13.2б) удовлетворяет условию $a_n \to 0$; однако, этот ряд расходится.

Пример. Исследуем на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin \omega n$.

Если $\sin\omega = 0$, то $\sin\omega n = 0$ для любого n и ряд сходится.

Если $\sin\omega \neq 0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\omega n$ расходится, поскольку $\sin\omega n$ не стремится к 0 при $n \to \infty$. Действительно, если $\sin\omega n \to 0$, то $\sin\omega(n+1) \to 0$. Из формулы

$$\sin\omega(n+1) = \sin\omega n \cos\omega + \cos\omega n \sin\omega$$

вытекает, что

$$\cos\omega n = \frac{\sin\omega(n+1) - \sin\omega n\cos\omega}{\sin\omega} \to 0 \quad (n\to\infty).$$

Тогда $\sin^2\omega n + \cos^2\omega n \to 0$ $(n \to \infty)$. Это противоречит основному тригонометрическому тождеству.

Пример 13.4. Исследуем на сходимость ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$.

а) Если $|q| < 1$, то $S_N = 1 + q + q^2 + \dots + q^N = \dfrac{1-q^{N+1}}{1-q}$. Поэтому $S_N \to \dfrac{1}{1-q}$ при $N \to \infty$. Следовательно,

$$\boxed{\text{при } |q|<1 \text{ ряд } \sum_{n=0}^{\infty} q^n \text{ сходится и } \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.}$$

б) Если $|q| \geqslant 1$, то не выполняется необходимое условие сходимости $a_n \to 0$ (действительно, $|a_n| = |q|^n \geqslant 1$); поэтому

$$\boxed{\text{при } |q|\geqslant 1 \text{ ряд } \sum_{n=0}^{\infty} q^n \text{ расходится.}}$$

Теорема 13.5 (свойство линейности). *Если ряды* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *и* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ *сходятся, то при любых* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n)$ *также сходится, причем*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \mu \sum_{n=1}^{\infty} b_n. \tag{13.3}$$

Доказательство. Нетрудно видеть, что последовательность частичных сумм S_N для ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n)$ имеет вид

$$S_N = \lambda A_N + \mu B_N, \tag{13.4}$$

где A_N и B_N — последовательности частичных сумм рядов $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ соответственно. Переходя в равенстве (13.3) к пределу при $N \to \infty$, получаем (13.3). $\square$

Пример.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5 \cdot 2^n + 3^n}{6^n} = 5 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{5}{1 - \frac{1}{3}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{11}{2}.$$

Читатель уже заметил, что мы рассматривали не только ряды вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, но и ряды вида $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$. Можно рассматривать ряды вида $\sum\limits_{n=M}^{\infty} a_n$ с произвольным $M \in \mathbb{Z}$. Договоримся называть N-й частичной суммой ряда $\sum\limits_{n=M}^{\infty} a_n$ $(N \geqslant M)$ число

$$S_N = a_M + a_{M+1} + \dots + a_N.$$

По определению ряд $\sum\limits_{n=M}^{\infty} a_n$ сходится, если последовательность его частичных сумм S_N имеет конечный предел.

Ряд $\sum\limits_{n=M}^{\infty} a_n$ иногда называют M-м остатком (или хвостом) ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Лемма 13.6 (об остатке). *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд* $\sum\limits_{n=M}^{\infty} a_n$. *Причем,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = C + \sum_{n=M}^{\infty} a_n, \quad \text{где } C = a_1 + \dots + a_{M-1}.$$

Доказательство. Пусть S_N — N-я частичная сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, а $\widetilde{S}_N$ — N-я частичная сумма ряда $\sum\limits_{n=M}^{\infty} a_n$. Тогда

$$S_N = (a_1 + \dots + a_{M-1}) + (a_M + \dots + a_N) = C + \widetilde{S}_N.$$

Переходя в равенстве $S_N = C + \widetilde{S}_N$ к пределу при $N \to \infty$, получаем нужное равенство. $\square$

Следствие 13.7. *Изменение любого конечного числа членов ряда не влияет на его сходимость.*

Действительно, если $a_n = b_n$ при $n \geqslant M$, то ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ имеют одинаковые M-е остатки.

Признаки сходимости знакоположительных рядов.

Определение 13.8. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *знакоположительным*, если $a_n \geqslant 0$ при всех n.

Лемма 13.9 (критерий сходимости знакоположительного ряда). *Знакоположительный ряд сходится тогда и только тогда, когда последовательность его частичных сумм ограничена.*

Доказательство. ($\Rightarrow$) Если ряд сходится, то последовательность S_N по определению имеет конечный предел, и, следовательно, ограничена.

($\Leftarrow$) Заметим, что если $a_n \geqslant 0$, то при любом N

$$S_{N+1} = S_N + a_{N+1} \geqslant S_N,$$

т.е. последовательность S_N является неубывающей. Если она при этом еще и ограничена, то по теореме Вейерштрасса имеет конечный предел. $\square$

Теорема 13.10 (1-й признак сравнения). *Пусть $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$ для всех n. Тогда если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ также сходится.*

Доказательство. Из условия $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$ вытекает, что $0 \leqslant A_N \leqslant B_N$, где

$$A_N = a_1 + \cdots + a_N, \qquad B_N = b_1 + \cdots + b_N$$

— частичные суммы этих рядов. По лемме 13.9 последовательность B_n ограничена: $B_N \leqslant C$. Отсюда следует, что ограничена последовательность A_N. Применяя вновь лемму 13.9, получаем сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. □

Замечание 13.11. Из теоремы 13.10 вытекает, что если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, то расходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ (ведь если он сходится, то сходится и первый ряд).

Если имеет место описанная в теореме 13.10 ситуация ($0 \leqslant a_n \leqslant b_n$), то говорят, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *мажорирует* ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Пример. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos^2 n}{2^n}$ мажорируется сходящимся рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n}$. Поэтому он сходится.

Теорема 13.12 (2-й признак сравнения). *Пусть $a_n \geqslant 0$, $b_n \geqslant 0$ и $a_n \sim b_n$ при $n \to \infty$. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.*

Доказательство. Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится. По определению, последовательности a_n и b_n эквивалентны, если $a_n = b_n u_n$, где $u_n \to 1$ при $n \to \infty$. Из того, что $u_n \to 1$, вытекает, что при $n \geqslant n_0$ справедливо неравенство $u_n \leqslant \frac{3}{2}$. Это означает, что ряд $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$ мажорируется рядом, $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} \frac{3}{2} b_n = \frac{3}{2} \sum\limits_{n=n_0}^{\infty} b_n$, который сходится. Тогда по 1-й теореме сравнения сходится и ряд $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$, а с учетом леммы 13.6 и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Лекция 14

Теорема 14.1 (признак Даламбера). *Пусть $a_n > 0$. Тогда если существует такое число q, $0 \leqslant q < 1$, что $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant q$ для всех n, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Если же $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.*

Доказательство. Из условия $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant q$ вытекает, что

$$a_2 \leqslant q a_1, \quad a_3 \leqslant q a_2 \leqslant q^2 a_1, \quad \ldots, \quad a_n \leqslant q^{n-1} a_1.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^{n-1} a_1 = a_1 \sum\limits_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$ ($|q| < 1$) сходится (его сумма равна $\dfrac{a_1}{1-q}$), следовательно, по первой теореме сравнения, сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Если $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1$, то a_n не убывает, следовательно $a_n \geqslant a_1 > 0$; поэтому последовательность a_n не может стремиться к 0. По необходимому признаку сходимости (теорема 13.3) ряд расходится.

Замечание. Условие теоремы 14.1 можно (и нужно) ослабить: $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant q < 1$, начиная с некоторого n_0. Это не влияет на сходимость в силу следствия 13.7.

Теорема 14.2 (признак Даламбера в предельной форме). *Пусть $a_n > 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q$. Тогда если $q < 1$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Если $q > 1$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.*

Доказательство. Если $q < 1$, то для $\varepsilon = (1-q)/2$, начиная с $n \geqslant n_0$, справедливо неравенство

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - q \right| < \varepsilon = \frac{1-q}{2},$$

откуда

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < q' = q + \varepsilon = 1 - \frac{1-q}{2} < 1 \qquad (n \geqslant n_0).$$

Следовательно, по теореме 14.1 ряд сходится.

Если $q > 1$, то, при $n \geqslant n_0$ имеем $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1$. Следовательно, ряд расходится.

Пример. Исследуем на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n}{n!}$. Применим теорему 14.2:

$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{2^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0 < 1 \qquad (n \to \infty);$$

следовательно, ряд сходится.

Пример. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^\alpha}$ по Даламберу исследовать не получается:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)^\alpha}}{\frac{1}{n^\alpha}} = \frac{n^\alpha}{(n+1)^\alpha} = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^\alpha} \to 1 \qquad (n \to \infty);$$

$q = 1$. Признак Даламбера в этом случае ответа не дает.

Теорема 14.3 (радикальный признак Коши). *Пусть $a_n \geqslant 0$ и существует число $q < 1$, такое, что $\sqrt[n]{a_n} \leqslant q$ для всех n. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.*

Доказательство. Из неравенства $\sqrt[n]{a_n} \leqslant q$ вытекает, что $a_n \leqslant q^n$. Таким образом, сходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ мажорирует ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Отсюда вытекает его сходимость. □

Теорема 14.4 (радикальный признак Коши в предельной форме). *Пусть $a_n \geqslant 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q < 1$. Тогда если $q < 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.*

Если $q > 1$, то ряд расходится.

Доказательство. Действительно, если $q < 1$, то положим $\varepsilon = (1-q)/2$, $q' = q + \varepsilon = (1+q)/2 < 1$. По определению предела при $n \geqslant n_0$ имеем $|\sqrt[n]{a_n} - q| < \varepsilon$, откуда вытекает, что $\sqrt[n]{a_n} \leqslant q' < 1$.

Если $q > 1$, то во втором случае $\sqrt[n]{a_n} \geqslant 1$ (при $n \geqslant n_0$). Отсюда, конечно, следует, что a_n не стремится к 0.

Пример. Исследуем на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)^{n^2}$. Имеем

$$q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{1}{e} < 1.$$

По теореме 14.4 ряд сходится.

Замечание. К сожалению, мы вновь не можем исследовать ряд $\sum\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^\alpha}$. В самом деле,

$$q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^\alpha}} = \lim_{n\to\infty} n^{-\alpha/n} = \lim_{n\to\infty} e^{-\alpha \ln n/n} = e^0 = 1.$$

Теорема 14.5 (интегральный признак сходимости). *Пусть неотрицательная функция $f(x)$ непрерывна на $[1, +\infty)$ и является невозрастающей на $[1, +\infty)$. Пусть, $a_n = f(n)$.*

Тогда ряд $\sum\limits_{n\to\infty} a_n$ сходится в том и только том случае, когда сходится несобственный интеграл $\displaystyle\int_1^\infty f(x)\,dx$.

Доказательство. В силу монотонности функции $f(x)$ имеем $f(n+1) \leqslant f(x) \leqslant f(n)$ при $x \in [n, n+1]$. Проинтегрировав это неравенство по отрезку $[n, n+1]$, получим

$$\int_n^{n+1} f(n+1)\,dx \leqslant \int_n^{n+1} f(x)\,dx \leqslant \int_n^{n+1} f(n)\,dx.$$

Здесь $\int_n^{n+1} f(n+1)\,dx = \int_n^{n+1} a_{n+1}\,dx = a_{n+1}$, $\int_n^{n+1} f(n)\,dx = \int_n^{n+1} a_n\,dx = a_n$. Поэтому

$$a_{n+1} \leqslant \int_n^{n+1} f(x)\,dx \leqslant a_n.$$

Из этого неравенства вытекает, что

$$\sum_{n=1}^{N} a_{n+1} \leqslant \sum_{n=1}^{N} \int_n^{n+1} f(x)\,dx \leqslant \sum_{n=1}^{N} a_n.$$

Пользуясь аддитивностью интеграла, получаем в итоге неравенство

$$\sum_{n=1}^{N} a_{n+1} \leqslant \int_1^{N+1} f(x)\,dx \leqslant \sum_{n=1}^{N} a_n. \tag{14.1}$$

Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Тогда по лемме 13.9 существует такое число C, что $\sum\limits_{n=1}^{N} a_n \leqslant C$ для любого N. Тогда для любого N справедливо неравенство $\int_1^{N+1} f(x)\,dx \leqslant C$. А поскольку для любого $\xi \geqslant 1$ существует натуральное число N, такое, что $N+1 \geqslant \xi$, то неравенство $\int_1^{\xi} f(x)\,dx \leqslant C$ справедливо для любого $\xi \geqslant 1$. По критерию сходимости несобственного интеграла от неотрицательной функции интеграл $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ сходится.

Наоборот, если сходится этот интеграл, то по этому же критерию существует постоянная C, такая, что для любого $\xi \geqslant 1$ справедливо неравенство $\int_1^{\xi} f(x)\,dx \leqslant C$. Отсюда и из неравенства (14.1) вытекает, что для любого N справедливо неравенство $\sum\limits_{n=1}^{N} a_{n+1} \leqslant C$. Нетрудно понять, что $\sum\limits_{n=1}^{N} a_{n+1} = S_{N+1} - a_1$. Таким образом, последовательность S_N частичных сумм ряда ограничена (постоянной $C + a_1$). Следовательно, по лемме 13.9 ряд сходится. □

Пример 14.6. Исследуем на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{\alpha}}$.

Ясно, что при $\alpha \leqslant 0$ ряд расходится (не выполнены необходимые условия сходимости).

Пусть $\alpha > 0$. Функция $f(x) = \dfrac{1}{x^{\alpha}}$ монотонно убывает. Кроме того, $f(n) = \dfrac{1}{n^{\alpha}}$. Поэтому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{\alpha}}$ сходится тогда и только тогда, когда сходится несобственный интеграл $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}\,dx$. Это означает, что

$$\boxed{\text{ряд } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \quad \begin{array}{l} \text{сходится при } \alpha > 1, \\ \text{расходится при } \alpha \leqslant 1. \end{array}}$$

Пример 14.7. Нетрудно проверить, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{\alpha} \ln^{\beta} n}$ сходится при тех же значениях параметров, что и несобственный интеграл $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha} \ln^{\beta} x}\,dx$.

Для этого нужно убедиться в том, что при $\alpha > 0$ функция $\dfrac{1}{x^{\alpha} \ln^{\beta} x}$ монотонно убывает (при достаточно больших x). Это можно сделать, вычислив производную этой функции, но мы не будем этим заниматься.

Замечание. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ называется *гармоническим*. В соответствии со сказанным выше этот ряд расходится.

Из формулы (14.1) вытекает, что

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{N} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \geqslant \int_1^{N+1} \frac{1}{x}\,dx = \ln(N+1).$$

Эту оценку полезно иметь в виду.

Лекция 15

Абсолютная и условная сходимость числовых рядов.

Определение 15.1. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Если ряд сходится, но не является абсолютно сходящимся, то говорят, что он *сходится условно*.

Теорема 15.2 (о сходимости абсолютно сходящихся рядов). *Абсолютно сходящийся ряд сходится.*

Доказательство. Рассмотрим последовательности

$$a_n^+ = \frac{|a_n| + a_n}{2}, \qquad a_n^- = \frac{|a_n| - a_n}{2}.$$

Нетрудно проверить, что $0 \leqslant a_n^+ \leqslant |a_n|$, $0 \leqslant a_n^- \leqslant |a_n|$. Это означает, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ мажорирует ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^+$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^-$ и по первой теореме сравнения эти ряды сходятся. Остается заметить, что $a_n = a_n^+ - a_n^-$. Значит, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$$

также сходится. □

Пример. Исследуем на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{n^{3/2}}$.

Это ряд сходится, поскольку сходится абсолютно:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{n^{3/2}} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}.$$

Пример. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ не является абсолютно сходящимся, так как ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

расходится. Однако, ряд является условно сходящимся. Мы докажем этот факт при помощи признака Лейбница.

Знакопеременные и знакочередующиеся ряды.

Определение 15.3. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *знакопеременным*, если он не является знакопостоянным и называется *знакочередующимся*, если имеет вид $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$, где $a_n \geqslant 0$ (или $a_n \leqslant 0$).

Например, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ — знакочередующийся (и одновременно знакопеременный) ряд, а $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{n}$ — просто знакопеременный.

Теорема 15.4 (признак Лейбница). *Пусть a_n — неотрицательная невозрастающая последовательность, имеющая предел* 0 ($a_n \searrow 0$). *Тогда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ *сходится.*

Доказательство. Рассмотрим последовательность частичных сумм вида

$$S_{2N} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2N-1} - a_{2N}).$$

Эта последовательность является неубывающей, поскольку

$$S_{2(N+1)} - S_{2N} = a_{2N+1} - a_{2N+2} \geqslant 0.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} S_{2N} &= a_1 - \underbrace{(a_2 - a_3)}_{\geqslant 0} - \underbrace{(a_4 - a_5)}_{\geqslant 0} + \cdots + \underbrace{(a_{2N-2} - a_{2N-1})}_{\geqslant 0} - a_{2N} \\ &\leqslant a_1 - a_{2N} \leqslant a_1. \end{aligned}$$

Это означает, что последовательность S_{2N} ограничена сверху.

Неубывающая ограниченная сверху последовательность имеет предел. Обозначим этот предел через S: $\lim\limits_{N\to\infty} S_{2N} = S$.

Далее,

$$\lim_{N\to\infty} S_{2N+1} = \lim_{N\to\infty} S_{2N} + \lim_{N\to\infty} a_{2N+1} = S + 0 = S$$

(мы воспользовались тем, что $a_{2N} \to 0$). Итак,

$$\lim_{N\to\infty} S_{2N+1} = \lim_{N\to\infty} S_{2N} = S.$$

Отсюда вытекает, что $\lim\limits_{N\to\infty} S_N = S$, т.е. ряд сходится. □

Замечание. Из доказательства теоремы видно, что $S_{2N} \leqslant S$. Нетрудно показать, что $S \leqslant S_{2N+1}$.

Из двойного неравенства $S_{2N} \leqslant S \leqslant S_{2N+1}$ вытекает, что $|S_{2N} - S| \leqslant S_{2N+1} - S_{2N} = a_{2N+1}$.

Кроме того, из двойного неравенства $S_{2N} \leqslant S \leqslant S_{2N-1}$ вытекает, что $|S_{2N-1} - S| \leqslant S_{2N-1} - S_{2N} = a_{2N}$.

Таким образом, если ряд удовлетворяет условиям признака Лейбница, то для любого N справедлива оценка

$$|S - S_N| \leqslant a_{N+1}.$$

Это означает, что погрешность приближенной формулы

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n \approx \sum_{n=1}^{N}(-1)^{n+1}a_n$$

не превосходит a_{N+1}.

Например, погрешность приближенного равенства

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^n} \approx 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{27} - \frac{1}{256}$$

не превышает величины $5^{-5} = 0{,}00032$.

Возвращаясь к примеру $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ из предыдущего пункта, мы можем утверждать, что этот ряд сходится (условно, поскольку не является абсолютно сходящимся) по признаку Лейбница:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}, \quad \text{где } \frac{1}{n} \searrow 0.$$

Замечание. Поскольку изменение первых членов ряда не влияет на его сходимость, условия, накладываемые на a_n в признаке Лейбница можно несколько ослабить: достаточно требовать, чтобы последовательность a_n была монотонной и неотрицательной, лишь начиная с некоторого n_0 (при $n \geqslant n_0$).

Например, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n-10{,}5}$ (здесь $a_n = \frac{1}{n-10{,}5} \geqslant 0$ и монотонно убывает лишь при $n \geqslant 11$).

Суммирование методом Абеля (суммирование «по частям»).

Рассмотрим сумму вида $\sum\limits_{n=1}^{N} A_n b_n$. Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} &a_1 = A_1, \qquad a_n = A_n - A_{n-1} \quad (n = 2, 3, \ldots, N),\\ &B_0 = 0, \qquad B_n = b_1 + \cdots + b_n \quad (n = 1, 2, \ldots, N) \end{aligned}$$

Ясно, что при этом

$$A_n = a_1 + \cdots + a_n \quad (n = 1, 2, \ldots, N).$$

Преобразуем сумму $\sum\limits_{n=1}^{N} A_n b_n$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N} A_n b_n &= \sum_{n=1}^{N} A_n(B_n - B_{n-1}) = \sum_{n=1}^{N} A_n B_n - \sum_{n=1}^{N} A_n B_{n-1} = \sum_{n=1}^{N} A_n B_n - \sum_{n=2}^{N} A_n B_{n-1} = \sum_{n=1}^{N} A_n B_n - \sum_{k=1}^{N-1} A_{k+1} B_k\\ &= A_N B_N + \sum_{n=1}^{N-1} A_n B_n - \sum_{n=1}^{N-1} A_{n+1} B_n = A_N B_N + \sum_{n=1}^{N-1} \underbrace{(A_n - A_{n+1})}_{-a_{n+1}} B_n = A_N B_N - \sum_{n=1}^{N-1} a_{n+1} B_n. \end{aligned}$$

Итак, справедлива формула

$$\sum_{n=1}^{N} A_n b_n = A_N B_N - \sum_{n=1}^{N-1} a_{n+1} B_n, \tag{15.1}$$

которую мы будем называть формулой суммирования «по частям» или формулой суммирования методом Абеля (или преобразованием Абеля).

По своей структуре эта формула очень напоминает формулу интегрирования по частям. Отсюда и название.

Если сделать замену $n \mapsto n-1$ в последней сумме, то формулу (15.1) можно записать несколько иначе:

$$\sum_{n=1}^{N} A_n b_n = A_N B_N - \sum_{n=2}^{N} a_n B_{n-1}. \tag{15.1'}$$

Пример 15.5. Вычислим при помощи преобразования Абеля сумму $\sum\limits_{n=1}^{N} n q^n$.

При $q = 1$ работает школьная формула для суммы членов арифметической прогрессии

$$\sum_{n=1}^{N} nq^n = \sum_{n=1}^{N} n = \frac{N(N+1)}{2}.$$

Пусть $q \neq 1$. Положим $A_n = n$, $b_n = q^n$. Тогда

$$a_n = A_n - A_{n-1} = n - (n-1) = 1, \qquad B_n = \sum_{k=1}^{n} q^k = q + q^2 + \cdots + q^n = q\,\frac{1-q^n}{1-q}.$$

Воспользуемся преобразованием Абеля (формула (15.1)):

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} nq^n &= N \cdot q\,\frac{1-q^N}{1-q} - \sum_{n=1}^{N-1} 1 \cdot q\,\frac{1-q^n}{1-q} = Nq\,\frac{1-q^N}{1-q} - \frac{q}{1-q}\Bigl(\sum_{n=1}^{N-1}(1-q^n)\Bigr)\\ &= \frac{q}{1-q}\Bigl(N(1-q^N) - \Bigl(N - 1 - \sum_{n=1}^{N-1} q^n\Bigr)\Bigr) = \frac{q}{1-q}\Bigl(1 - Nq^N + \sum_{n=1}^{N-1} q^n\Bigr)\\ &= \frac{q}{1-q}\Bigl(1 - Nq^N + q\,\frac{1-q^{N-1}}{1-q}\Bigr) = \frac{q}{(1-q)^2}\,(1 - Nq^N(1-q) - q^N).\end{aligned}$$

В качестве «бесплатного» приложения получаем следующий результат: при $|q| \leqslant 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} nq^n = \lim_{N\to\infty} \frac{q}{(1-q)^2}\,(1 - Nq^N(1-q) - q^N) = \frac{q}{(1-q)^2}.$$

Теорема 15.6 (признак Дирихле). *Пусть неотрицательная последовательность A_n невозрастает и стремится к 0 ($A_n \searrow 0$). Пусть b_n такова, что последовательность частичных сумм $B_N = b_1 + \cdots + b_N$ ограничена.*

Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n b_n$ сходится.

Доказательство. По условию, последовательность B_N ограничена, т.е. существует такая постоянная M, что $|B_N| \leqslant M$ (для всех N). Нам будет удобнее иметь дело с неотрицательной последовательностью B_n; поэтому изменим первый член последовательности b_1, добавив к нему число M. На сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n b_n$ это не повлияет (изменится только один его член), но при этом все частичные суммы B_N также увеличатся на величину M, так что будет выполняться двойное неравенство

$$0 \leqslant B_N \leqslant 2M.$$

Применим преобразование Абеля:

$$\sum_{n=1}^{N} A_n b_n = A_N B_N - \sum_{n=2}^{N} a_n B_{n-1}$$

Здесь $A_N \to 0$ при $N \to \infty$, а B_N ограничена. Значит, $A_N B_N \to 0$ при $N \to \infty$. Остается доказать, что последовательность $-\sum\limits_{n=2}^{N} a_n B_{n-1}$ имеет конечный предел при $N \to \infty$, т.е. доказать, что ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-a_n)B_{n-1}$ сходится. Это знакоположительный ряд ($-a_n = A_{n-1} - A_n \geqslant 0$). Он мажорируется рядом $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-a_n)2M = 2M\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-a_n)$, а ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-a_n)$ сходится, поскольку последовательность его частичных сумм

$$-a_2 - a_2 - \cdots - a_N = a_1 - A_N$$

имеет конечный предел, равный a_1 (по условию $A_N \to 0$).

Итак, последовательность $\sum\limits_{n=1}^{N} A_n b_n$ имеет конечный предел при $N \to \infty$. По определению это означает, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{N} A_n b_n$ сходится. □

Замечание 15.6. Обязательно обратите внимание! В теореме 15.6 требуется, ограниченность последовательности частичных сумм

$$B_N = b_1 + \cdots + b_N,$$

а не самой последовательности. Это совсем не одно и то же (хотя из ограниченности частичных сумм вытекает ограниченность самой последовательности). В самом деле, последовательность $b_n \equiv 1$ ограничена, а соответствующая последовательность частичных сумм $B_N = 1 + \dots + 1 = N$, очевидно, не является ограниченной.

Замечание 15.8. Нетрудно видеть, что признак Лейбница является частным случаем признака Дирихле. При этом роль последовательности A_n из признака Дирихле играет последовательность a_n из признака Лейбница, а роль последовательности b_n играет последовательность $(-1)^{n+1}$. Соответствующие частичные суммы, как не трудно догадаться, имеют вид $\{1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots\}$ и, следовательно, ограничены.

Лекция 16

Пример 16.1. Исследуем на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \omega n}{n^\alpha}. \tag{16.1}$$

При $\alpha \leqslant 0$ последовательность $\dfrac{\cos \omega n}{n^\alpha}$ не стремится к 0 (почему?). Поэтому при $\alpha \leqslant 0$ ряд расходится.

Если $\omega = 2\pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$), то $\cos \omega n = 1$ и ряд превращается в хорошо известный нам ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^\alpha}$, который сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leqslant 1$.

Пусть $\omega \neq 2\pi k$ и $\alpha > 0$. Положим $A_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$ и $b_n = \cos \omega n$. Нетрудно видеть, что последовательность A_n удовлетворяет условиям признака Дирихле. Покажем, что последовательность $b_n = \cos \omega n$ имеет ограниченную последовательность частичных сумм. Для этого просто вычислим эти частичные суммы

$$B_N = \cos \omega + \cos 2\omega + \dots + \cos N\omega$$

при помощи следующего остроумного приема. Умножим левую и правую части этого равенства на $\sin \frac{\omega}{2}$ и воспользуемся школьной формулой $\cos x \sin y = \frac{1}{2}(\sin(x+y) - \sin(x-y))$:

$$\begin{aligned}
B_N \sin \frac{\omega}{2} &= \cos \omega \sin \frac{\omega}{2} + \cos 2\omega \sin \frac{\omega}{2} + \dots + \cos N\omega \sin \frac{\omega}{2} \\
&= \frac{1}{2}\left(\left(\sin \frac{3}{2}\omega - \sin \frac{\omega}{2}\right) + \left(\sin \frac{5}{2}\omega - \sin \frac{3}{2}\omega\right) + \dots + \left(\sin \frac{2N+1}{2}\omega - \sin \frac{2N-1}{2}\omega\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sin \frac{2N+1}{2}\omega - \sin \frac{\omega}{2}\right).
\end{aligned}$$

Заметим, что $\sin \frac{\omega}{2} \neq 0$, поскольку $\omega \neq 2\pi k$. Поэтому мы можем записать

$$B_N = \frac{\sin \frac{2N+1}{2}\omega - \sin \frac{\omega}{2}}{2 \sin \frac{\omega}{2}}.$$

Отсюда, в частности, следует, что $B_N \leqslant \dfrac{1}{|\sin \frac{\omega}{2}|}$ при любом N, т.е. последовательность B_N ограничена и по признаку Дирихле ряд (16.1) сходится.

Исследуем ряд (16.1) на абсолютную сходимость.

Если $\alpha > 1$, то этот ряд сходится абсолютно, поскольку $\left|\dfrac{\cos \omega n}{n^\alpha}\right| \leqslant \dfrac{1}{n^\alpha}$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^\alpha}$ сходится.

Покажем, что при $\alpha \leqslant 1$ ряд (16.1) не является абсолютно сходящимся. В самом деле,

$$\left|\frac{\cos \omega n}{n^\alpha}\right| \geqslant \frac{\cos^2 \omega n}{n^\alpha}.$$

Если $\omega = \pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$), то $\cos^2 \omega n = 1$, и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos^2 \omega n}{n^\alpha} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^\alpha}$ расходится. Если $\omega \neq \pi k$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 \omega n}{n^\alpha} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2\omega n}{n^\alpha},$$

причем справа один из рядов сходится (почему?), а другой расходится. Отсюда вытекает, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos^2 \omega n}{n^\alpha}$ расходится.

Итак, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\dfrac{\cos \omega n}{n^\alpha}\right|$ мажорирует расходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos^2 \omega n}{n^\alpha}$ и по первой теореме сравнения сам расходится.

Итог:

$$\text{ряд } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \omega n}{n^{\alpha}} \quad \begin{array}{l} \text{сходится абсолютно, если } \alpha > 1, \\ \text{сходится условно, если } 0 < \alpha \leqslant 1,\ \omega \neq 2\pi k, \\ \text{расходится в остальных случаях.} \end{array}$$

Отметим, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin \omega n}{n^{\alpha}}$ обладает аналогичными свойствами (которые можно получить при помощи аналогичных рассуждений). Единственное отличие состоит в следующем: при $\omega = 2\pi k$ ряд состоит из нулей и, следовательно, сходится абсолютно.

Пример 16.2. Исследуем на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$.

Отметим, что ряд не является абсолютно сходящимся. Действительно,

$$\left| \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} \right| = \frac{1}{\sqrt{n} + (-1)^n} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Попытка исследовать ряд при помощи признака Лейбница также не проходит, поскольку последовательность $\dfrac{1}{\sqrt{n} + (-1)^n}$ не является монотонной (убедитесь в этом самостоятельно!).

Поступим следующим образом:

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \frac{1}{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}},$$

где $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ — бесконечно малая последовательность. С учетом асимптотической формулы

$$\frac{1}{1+\alpha} = 1 - \alpha + O(\alpha^2) \quad (\alpha \to 0)$$

имеем

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \frac{1}{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n}\right) \right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).$$

Далее, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ сходится (по признаку Лейбница), ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ расходится (гармонический ряд), ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} O\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$ сходится абсолютно, так как по определению O-большого $\left| O\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right) \right| \leqslant \dfrac{C}{n^{3/2}}$. Таким образом,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}_{\text{сх.}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}}_{\text{расх.}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)}_{\text{сх.}}.$$

Отсюда, конечно, следует, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$ расходится (если бы он сходился, то расходящийся гармонический ряд можно было бы представить в виде линейной комбинации трех сходящихся рядов).

В заключение сформулируем без доказательства два утверждения, которые показывают в чем по существу состоит отличие абсолютно сходящихся рядов от рядов, сходящихся условно (и, заодно, поясняют происхождение этих терминов).

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Пусть $\{n_k\}$ — произвольная последовательность натуральных чисел, такая, что 1) в множество чисел n_k входят все натуральные числа, 2) ни одно из натуральных чисел не входит это множество дважды. Ясно, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{n_k}$ состоит из тех же членов, что исходный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Будем говорить, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{n_k}$ получен из $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ перестановкой его слагаемых.

Теорема 16.3. *Ряд сходится абсолютно тогда и только тогда, когда сходится любой ряд, полученный перестановкой его слагаемых.*

Если ряд сходится абсолютно, то суммы всех рядов, полученных перестановкой его слагаемых, совпадают.

Грубо говоря, для абсолютно сходящегося ряда выполняется привычное правило: от перемены мест слагаемых сумма не меняется.

Поразительно, но если ряд сходится условно, то это утверждение перестает быть верным.

Теорема 16.4. *Если ряд сходится условно, то для любого наперед заданного числа S существует такая перестановка его слагаемых, что полученный ряд сходится к S. Кроме того, всегда можно найти такую перестановку, что полученный ряд будет расходиться.*

Таким образом, условная сходимость означает, что ряд сходится при условии, что его члены стоят в некотором вполне определенном порядке. Абсолютная сходимость означает независимость сходимости от порядка.

Лекция 17

§11. Функции многих переменных

Последовательности в $\mathbb{R}^n$.

Определение 17.1. Пространством $\mathbb{R}^n$ мы будем называть множество точек $x = (x_1, \dots, x_n)$, где $x_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, \dots, n)$, снабженное расстоянием, т. е. функцией

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

Иногда вместо $\rho(x, y)$ будем писать $|x - y|$.

Основные свойства расстояния в $\mathbb{R}^n$:

1) $\rho(x, y) = 0 \iff x = y$ (т. е. $x_1 = y_1, \dots, x_n = y_n$);
2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ для любых x и y;
3) $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y)$ для любых x, y и z (так называемое неравенство треугольника)

Отметим, что расстояние, удовлетворяющее свойствам 1)–3), можно задать и другими формулами, например

$$\tilde{\rho}(x, y) = |x_1 - y_1| + \dots + |x_n - y_n|.$$

Легко проверить, что все эти свойства выполнены.

Определение 17.2. *ε-окрестностью точки* $a \in \mathbb{R}^n$ называется множество $O_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{R}^n : \rho(x, a) < \varepsilon\}$ $(|x - a| < \varepsilon)$.

Определение 17.3. Рассмотрим последовательность $x^{(k)} \in \mathbb{R}^n$, $k = 1, 2, \dots$. Будем говорить, что $x^{(k)} \to a$ при $k \to \infty$ или $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)} = a$, если $|x^{(k)} - a| \to 0$ при $k \to \infty$, т. е.

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt{(x_1^{(k)} - a_1)^2 + \ldots + (x_n^{(k)} - a_n)^2} = 0.$$

Теорема 17.4 (об эквивалентности сходимости в $\mathbb{R}^n$ покоординатной сходимости). *Последовательность $x^{(k)}$ сходится в $\mathbb{R}^n$ к a тогда и только тогда, когда $x_i^{(k)}$ сходится к a_i для каждого $i = 1, \dots, n$:*

$$\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = a \iff \lim_{k\to\infty} x_i^{(k)} = a_i \ \text{ для всех } \ i = 1, \dots, n.$$

Доказательство. Необходимость ($\Rightarrow$). Для любого $i = 1, \dots, n$ справедлива оценка

$$|x_i - y_i| \leqslant \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2} = \rho(x, y).$$

Поэтому

$$|x_i^{(k)} - a_i| \leqslant |x^{(k)} - a| \to 0 \qquad (k \to \infty).$$

Достаточность ($\Leftarrow$). Пусть $x_1^{(k)} - a_1 \to 0$, …, $x_n^{(k)} - a_n \to 0$ при $k \to \infty$. Тогда $(x_1^{(k)} - a_1)^2 \to 0$, …, $(x_n^{(k)} - a_n)^2 \to 0$ при $k \to \infty$. Следовательно, $(x_1^{(k)} - a_1)^2 + \dots + (x_n^{(k)} - a_n)^2 \to 0$ при $k \to \infty$. Значит,

$$\sqrt{(x_1^{(k)} - a_1)^2 + \ldots + (x_n^{(k)} - a_n)^2} \to 0 \quad \text{при } k \to \infty. \quad \square$$

Пример 17.5. 1) В $\mathbb{R}^3$ последовательность $x^{(k)} = \left(\frac{1}{k}, \frac{k}{k+1}, \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k\right)$ сходится к $(0, 1, e)$.

2) В $\mathbb{R}^2$ последовательность $x^{(k)} = (\frac{1}{k}, k)$ не имеет предела, так как вторая координата $x_2^{(k)} = k$ не имеет (конечного) предела.

Определение 17.6. Последовательность $x^{(k)}$ называется *последовательностью Коши* (или *последовательностью, сходящейся в себе*, или *фундаментальной*), если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $N = N(\varepsilon)$, что для всех $k, m \geqslant N$ справедлива оценка $\rho(x^{(k)}, x^{(m)}) < \varepsilon$.

Теорема 17.7 (о полноте $\mathbb{R}^n$). *Любая фундаментальная последовательность в $\mathbb{R}^n$ сходится.*

Доказательство. Поскольку $|x_i^{(k)} - x_i^{(m)}| \leqslant \rho(x_i^{(k)}, x_i^{(m)})$ (см. выше), для любого $i = 1, \dots, n$ имеем

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \quad |x_i^{(k)} - x_i^{(m)}| \leqslant \varepsilon \quad \forall k, m \geqslant N$$